SPOJITÉ NÁHODNÉ VELIčINY A VEKTORY

1. Nahodná veličina

Hustota náhodné veličiny X je funkce $f(x)$, která splňuje

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Distribuční funkce je funkce $F(x)$ definovaná vztahem

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Vztah hustoty a distribuční funkce je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s$$
$$f(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x).$$

Užitečný fakt je

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

To lze vidět jednak geometricky (obsah plochy pod grafem), jednak ze skutečnosti, že $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

2. Náhodný vektor

Sdružená hustota náhodného vektoru (X, Y) je funkce $f(x, y)$, která splňuje

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Uvědomme si, že je-li $A \subseteq \mathbb{R}^2$ libovolná množina (kruh, trojúhelník...), potom pravděpodobnost, že (X, Y) padne do A je

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Sdružená distribuční funkce je funkce $F(x, y)$ definovaná vztahem

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Vztah hustoty a distribuční funkce je

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s, t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$f(x, y) = \tfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \tfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(x, y).$$

3. Marginální hustoty a distrubuční funkce

Marginální hustoty jsou hustoty jednotlivých složek X a Y, podobně distribuční funkce. Přesněji marginální hustoty jsou funkce $f_X(x)$ a $f_Y(y)$, které splňují

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad P(c < Y < d) = \int_c^d f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Podobně marginální distribuční funkce $F_X(x)$ a $F_Y(y)$ jsou funkce

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad \text{a} \qquad F_Y(y) = P(Y \leq y).$$

Jistě tedy platí

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ \mathrm{d}s \qquad \text{a} \qquad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\ \mathrm{d}t$$

$$f_X(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) \qquad \text{a} \qquad f_Y(y) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y).$$

Marginální věci lze získat ze združených jednoduchým způsobem. Sdružená hustota $f(x, y)$ umí počítat pravděpodobnost $P(a < X < b, c < Y < d)$. Chceme-li tedy pravděpodobnost $P(a < X < b)$, stačí ve vzorečku říct, že Y může být libovolné a to se projeví integrováním od $-\infty$ po ∞ přes y.

Podobně sdružená distribuční funkce počítá $P(X \leq x, Y \leq y)$. Chceme-li tedy $P(X \leq x)$, ve vzorečku řekneme, že Y může být libovolné (libovolně vysoké) a to se projeví tím, že y pošleme do ∞. Máme

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{a} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ \mathrm{d}x$$

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) \qquad \text{a} \qquad F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y).$$

Takto umíme získat "hustoty z hustoty" a "distribuční funkce z distribučních funkcí". Pokud chceme "hustoty z distribučních funkcí" a naopak, jde pouze o kombinaci vztahů výše:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} f(s, t)\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \qquad \text{a} \qquad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t)\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$f_X(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, \infty) \qquad \text{a} \qquad f_Y(y) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F(\infty, y).$$

4. Nezávislost

Mějme náhodný vektor o složkách (X, Y). Řekneme, že náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, pokud pro sdruženou hustotu platí

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Potom totiž platí

$$P(a < X < b, c < Y < d) = P(a < X < b)\, P(c < Y < d).$$