# Matematika III, 4. cvičení

## Derivace funkce zadané implicitně

Funkci značíme písmenem $y$, proměnnou písmenem $x$, můžeme si představit, že $y = f(x)$. Proto derivace $x$ je 1, ale derivace $y$ je $y'$, takže např. $(x^2)' = 2x$ a $(y^2)' = 2yy'$.

**Příklad 1.** *Určete první a druhou derivaci, pokud* $x^2 + y^2 = 1$.

*Řešení.* Po zderivování obou stran máme $2x + 2yy' = 0$, z toho $y' = -\frac{x}{y}$. První rovnost je ekvivalentní s rovností $x + yy' = 0$, po zderivování dostaneme $1 + (y')^2 + yy'' = 0$. Tedy

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1 + x^2/y^2}{y} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

*Výsledek.* $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$.

**Příklad 2.** *Určete derivaci, pokud* $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.

*Výsledek.* $y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.

**Příklad 3.** *Určete derivaci, pokud* $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.

*Výsledek.* $y' = \frac{x\cos(x^2)}{y\sin(y^2)}$.

**Příklad 4.** *Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1, 1]$ implicitně rovnicí $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. Určete $y'(1)$ a $y''(1)$.*

*Výsledek.* $y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.

**Příklad 5.** *Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně rovnicí $y - \frac{\sin y}{2} = x$. Určete $y'(\frac{\pi-1}{2})$ a $y''(\frac{\pi-1}{2})$.*

*Výsledek.* $y'(\frac{\pi-1}{2}) = 1, y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

**Příklad 6.** *Rozhodněte, zda křivka $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, -1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.*

*Nápověda.* Křivku v okolí bodu $[1, -1]$ považujte za funkci $y(x)$ zadanou implicitně, odpovězte podle hodnoty druhé derivace této funkce v daném bodě.

*Výsledek.* $y''(1) = 16 > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

**Příklad 7.** *Rozhodněte, zda křivka $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ leží v okolí bodu $[1, 3]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.*

*Výsledek.* $y''(1) = \frac{15}{9} > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

**Příklad 8.** *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě $[1, \sqrt{2}, 2]$ funkce $z = f(x, y)$ definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$.*

*Výsledek.* $z'_x(1, \sqrt{2}) = \frac{z-2x}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z'_y(1, \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}z-2y}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z''_{xx}(1, \sqrt{2}) = z''_{yy}(1, \sqrt{2}) = -2$, $z''_{xy}(1, \sqrt{2}) = 0$.

**Příklad 9.** *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě $[-2, 0, 1]$ funkce $z = f(x, y)$ definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.*

*Výsledek.* $z'_x(-2, 0) = -\frac{4x+8z}{8x+2z-1} = 0$, $z'_y(-2, 0) = -\frac{4y}{8x+2z-1} = 0$, $z''_{xx}(-2, 0) = z''_{yy}(-2, 0) = \frac{4}{15}$, $z''_{xy}(-2, 0) = 0$.

### Implicitně zadaná funkce

Nechť $F(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, dále $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí $U$ bodu $x_0$, přičemž $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Funkce $y = f(x)$ je tedy rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definovaná v okolí bodu $x_0$. Pokud $F'_y(x_0, y_0) = 0$, funkce $f$ se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.
Podobné tvrzení platí pro funkci více proměnných, uvedeme si ještě případ pro 3 proměnné: Nechť $F(x,y,z)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$, dále $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí $U$ bodu $[x_0, y_0]$, přičemž $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Pokud $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, funkce $f$ se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.

**Příklad 10.** *V okolí kterých bodů jednodílného hyperboloidu $h$ o rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

*nelze vyjádřit $z$ jako funkci $z = f(x,y)$?*

*Nápověda.* Určete body $[x_0, y_0, z_0]$ na $h$ splňující $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, kde $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$.

*Výsledek.* Množina hledaných bodů je elipsa obsahující body $[x_0, y_0, 0]$, kde $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

**Příklad 11.** *V okolí kterých bodů křivky $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$ nelze vyjádřit $y$ jako funkci $y = f(x)$?*

*Výsledek.* $[2, 2], [-2, -2]$.

**Příklad 12.** *V okolí kterých bodů parabolické válcové plochy $z^2 - 2px = 0$, kde $p > 0$, nelze vyjádřit $z$ jako funkci $z = f(x,y)$?*

*Výsledek.* Všechny body osy $y$.