

Matematika III – 1. týden

Funkce více proměnných: parciální derivace, křivky, topologie eukleidovských prostorů

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19.9. – 23.9. 2016

Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce více proměnných
- 3 Topologie euklidovských prostorů
- 4 Křivky v euklidovských prostorech

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce více proměnných
- 3 Topologie euklidovských prostorů
- 4 Křivky v euklidovských prostorech

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce více proměnných
- 3 Topologie euklidovských prostorů
- 4 Křivky v euklidovských prostorech

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z .

To znamená, že funkce f definovaná v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z .

To znamená, že funkce f definovaná v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována.

(Hříčkou pro písemky a úlohy bývá úkol k danému explicitnímu výrazu definujícímu funkci najít co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definována vztahem

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)); (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f .

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definována vztahem

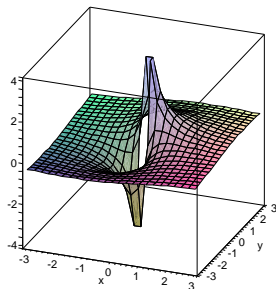
$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)); (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f .

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku,
maximálním definičním oborem
je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Parciální derivace

S nástroji pro funkce v jedné proměnné můžeme beze změn pracovat i teď. Prostě budeme derivovat, případně integrovat apod. jen podle jedné zvolené proměnné, zatímco ostatní budou považovány za parametry. (Máme přitom i k dispozici řadu výsledků o chování derivací a integrálů v závislosti na parametrech.)

Definition

Parciální derivací $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)$ funkce f v bodě (x_1, \dots, x_n) rozumíme obvyklou derivaci $\frac{d}{dx_i} f$ funkce jedné proměnné $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, ve které považujeme ostatní proměnné za parametry.

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce více proměnných
- 3 Topologie euklidovských prostorů**
- 4 Křivky v euklidovských prostorech

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory. Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q .

Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory. Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q .

Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|P - R\| = \|(P - Q) + (Q - R)\| \leq \|(P - Q)\| + \|(Q - R)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod P množiny $A \subset E_n$* : existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina*: její doplněk je uzavřený,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina*: její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ -okolí bodu P* : množina $\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n; \|P - Q\| < \delta\}$,

Definition

- *hraniční bod P množiny A* : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,

Definition

- *hraniční bod* P množiny A : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod* P množiny A : existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,

Definition

- *hraniční bod* P množiny A : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod* P množiny A : existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,
- *ohraničená množina*: leží celá v nějakém δ -okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),

Definition

- *hraniční bod P množiny A* : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* : existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,
- *ohraničená množina*: leží celá v nějakém δ -okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina*: uzavřená a ohraničená množina.

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
- 4 A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
- 4 A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
- 5 A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce více proměnných
- 3 Topologie euklidovských prostorů
- 4 Křivky v euklidovských prostorech**

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Definition

① *limita:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} c_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} c_n(t) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Definition

① *limita*:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} c_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} c_n(t) \right) \in \mathbb{R}^n$$

② *derivace*:

$$c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t - t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) = (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$$

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Definition

① *limita*:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} c_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} c_n(t) \right) \in \mathbb{R}^n$$

② *derivace*:

$$c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t - t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) = (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n$$

③ *integrál*:

$$\int_a^b c(t) dt = \left(\int_a^b c_1(t) dt, \dots, \int_a^b c_n(t) dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Všimněme si, že zatímco limity existují v \mathbb{E}_n , derivace křivky v \mathbb{E}_n je ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !

Všimněme si, že zatímco limity existují v \mathbb{E}_n , derivace křivky v \mathbb{E}_n je ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách v \mathbb{R}^n a stejně se rozpozná i jejich existence.

Derivace křivky a tečna ke křivce

Derivace zadává **tečný vektor** ke křivce $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření \mathbb{R}^n daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T : c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je **tečna ke křivce** c v bodě t_0 , nezávisí na parametrizaci křivky c .