Řešení 10. dobrovolného domácího úkolu

1. Není podokruh, ale je ideál.
2. Maximální jsou ty, které jsou generované prvočíslem. Jediný prvoideál, který není maximální, je zde $\{0\}$.
3. Vezměme polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ takové, že $f \cdot g \in I$. Polynom, který vznikne součinem $f \cdot g$ označme jako h. Předpokládejme, že by oba z polynomů f a g měly nějaký lichý koeficient a ukážeme, že dojdeme ke sporu. Nechť

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \; g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, \; h = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i.$$

Pak platí pro $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n+m\}$, že

$$c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k.$$

Nyní označme i_f (respektive i_g) nejmenší takové i, pro které je koeficient a_i v polynomu f lichý (respektive koeficient b_i v polynomu g). Pak platí, že $c_{i_f+i_g}$ je také lichý koeficient a tedy polynom h nepatří do ideálu I. (V sumě

$$c_{i_f+i_g} = \sum_{j+k=i_f+i_g} a_j b_k.$$

jsou sudé všechny sčítance kromě $a_{i_f} b_{i_g}$, který je lichý. Celý součet je proto také lichý.)