Algebra I – podzim 2015 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda množina S všech bijekcí $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ takových, že pro všechna $k,\ell,m \in \mathbb{N}$ mají $f((k,m))$ a $f((\ell,m))$ stejnou druhou složku, je podmonoidem, případně podgrupou, grupy všech bijekcí na množině $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ s operací kompozice.

2. **(10 bodů)** Určete podgrupu grupy S_4 generovanou permutacemi

$$f = (3,2,4) \circ (1,3,2) \text{ a } g = (1,4) \circ (2,4) \circ (1,2,3,4).$$

3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G,*)/H$, kde

$$\begin{aligned} G &= \{\, (a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a \neq b \,\}, \\ (a,b) * (c,d) &= (b + ac - bc, b + ad - bd), \qquad \text{pro } (a,b),(c,d) \in G, \\ H &= \{\, (a, a-1) \mid a \in \mathbb{Q} \,\}. \end{aligned}$$

4. **(10 bodů)** Rozložte polynom $3x^7 - 2x^6 - 3x + 2$ na součin nerozložitelných polynomů nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$.

5. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[4]{2} + \sqrt{2} + 2$ nad $\mathbb{Q}$.

6. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo $\frac{1}{\alpha^3+\alpha^2-\alpha+2}$, kde α je kořen polynomu $x^4 + 2x^3 + 2x + 2$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

7. **(5 bodů)** Dejte příklad oboru integrity, který není tělesem, a nějakého jeho ideálu, který tělesem je. Pokud takový obor integrity neexistuje, zdůvodněte proč.

8. **(5 bodů)** Dejte příklad dvou neizomorfních grup, které obsahují prvky právě stejných řádů (na počtu prvků daného řádu nezáleží). Pokud takové grupy neexistují, zdůvodněte proč.

9. **(5 bodů)** Dejte příklad dvou různých homomorfismů pologrup $\varphi,\psi\colon S \to T$ takových, že $\varphi(S) \cap \psi(S) = \emptyset$. Pokud takové homomorfismy neexistují, zdůvodněte proč.

10. **(5 bodů)** Definujte obor integrity s jednoznačným rozkladem.

11. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o existenci podgrupy generované danou množinou, včetně explicitního popisu prvků této podgrupy.

12. **(5 bodů)** Dokažte, že každý ideál okruhu polynomů nad tělesem je hlavní.