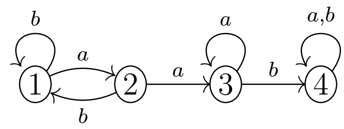
Algebra I – podzim 2017 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Nechť R je podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ generovaný prvkem $\sqrt[3]{2}$. Rozhodněte, zda množina $J = \{2a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ je ideálem okruhu R a zda množina $J \cup \mathbb{Z}$ je podokruhem okruhu R.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & r \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ r \in \{-1, 1\},\ c \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e + 2f\mathrm{i} & 2b & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b, e, f \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo $\frac{1}{\alpha^3+\alpha^2-\alpha}$, kde α splňuje $\alpha^4 + 6\alpha^3 + 3\alpha^2 = 3\alpha + 3$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad homomorfismu okruhů $\varphi\colon R \to S$ a ideálu I okruhu R takového, že $\varphi(I)$ není ideálem S.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy a jejích dvou prvků řádu 0 takových, že jejich součin má řád 2.

8. **(5 bodů)** Definujte okruh polynomů nad okruhem.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o rozkladu homomorfismu grup na tři homomorfismy speciálního typu.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že řád podgrupy grupy G dělí řád grupy G.