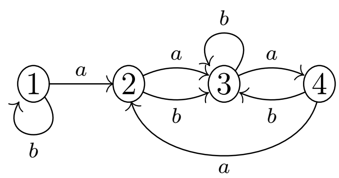
Algebra I – podzim 2017 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda množina $H = \{\, (a,a) \mid a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \,\}$ je podgrupa, případně normální podgrupa, grupy $(G,*)$, kde $G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{\, (a,-a) \mid a \in \mathbb{Q} \,\}$ a $*$ je operace definovaná pro všechna $(a,b),(c,d) \in G$ předpisem
$$(a,b)*(c,d) = \left(ac + bc - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}, ad + bd + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right).$$

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $\big((G,\cdot) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)\big)/H$, kde
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & f \\ 0 & p \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f \in \mathbb{Q}[x] \right\},$$
$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} p & f \\ 0 & p \end{pmatrix}, p^2 \right) \mid p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f \in \mathbb{Q}[x],\ f(1) = f(2) \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2}+2} \cdot \mathrm{i}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^5 - 10\alpha^3 - 17\alpha^2 - 18\alpha - 7},$$
kde α splňuje $\alpha^3 = 3 \cdot (\alpha^2 + \alpha + 1)$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy a jejích dvou prvků řádu 3 takových, že jejich součin má řád 2.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a neinjektivního homomorfismu $\varphi\colon G \to G$, jehož jádro je rovno jeho obrazu.

8. **(5 bodů)** Definujte podílové těleso oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující všechny ideály, prvoideály a maximální ideály v okruhu polynomů nad tělesem.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že v konečném případě je definice tělesa ekvivalentní definici oboru integrity.