

Lineární programování

- úvod

= optimalizace lineární funkce na množině,
omezené lineárními funkcemi

Jsme schopni nalézt globální minimum.

Lineární programování

- příklad

Čokoládovna vyrábí 5 druhů výrobků. Jsou to výrobky V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , a V_5 . Spotřebovává k tomu 3 základní suroviny: tuk, kakao a cukr. Tyto suroviny jsou k dispozici v omezených množstvích: 1500 kg tuku, 450 kg kakaa a 300 cukru na den.

Kapacita strojního zařízení je dostatečná, totéž se týká energie a pracovních sil, i další zdroje jsou k dispozici v dostatečném množství.

Lineární programování

- příklad II

Spotřeba surovin na 1 kg výrobku je dána tabulkou:

	V1	V2	V3	V4	V5
Tuk	-	0,4	0,3	0,6	0,6
Kakao	0,05	0,2	0,1	0,1	-
Cukr	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2
Cena [Kč/kg]	20	120	100	140	40

V tabulce jsou uvedeny rovněž ceny 1 kg každého výrobku.

Lineární programování

- příklad

Výrobky jsou vyráběny technologicky nezávisle na sobě navzájem. Výroba se tedy uskutečňuje ve formě pěti výrobních procesů, které však nejsou navzájem zcela izolované, neboť společně spotřebovávají výrobní zdroje, jeden proces na úkor druhého.

Pro účely matematické formulace zavedme 5 proměnných x_j , popisujících množství výrobku V_j v kg (jen vzhledem k našim 3 surovinám).

Lineární programování

- příklad

Matematická formulace úlohy:

Hledáme tedy nezáporné hodnoty proměnných $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, 5$), vyhovující nerovnostem:

$$0,4 \cdot x_2 + 0,3 \cdot x_3 + 0,6 \cdot x_4 + 0,6 \cdot x_5 \leq 1500$$

$$0,05 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_3 + 0,1 \cdot x_4 \leq 300$$

$$0,1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,2 \cdot x_3 + 0,1 \cdot x_4 + 0,2 \cdot x_5 \leq 450$$

a maximalizující účelovou funkcí:

$$f(\mathbf{x}) = 20 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 + 140 \cdot x_4 + 40 \cdot x_5$$

Lineární programování

- příklad

Optimální řešení tohoto problému:

$$x_1^* = 0; x_2^* = 0; x_3^* = 1000; x_4^* = 2000; x_5^* = 0$$

Maximální hodnota účelové funkce:

$$f(x^*) = 380\,000 \text{ Kč}$$

Poznámka: Úlohu lze také následovně rozšířit: Výrobku V_1 musí být alespoň 100 kg a výrobku V_5 alespoň 200 kg. Pak nezměněná matematická formulace bude navíc obohacena dvěma nerovnostmi:

$$x_1 \geq 100; x_5 \geq 200$$

Lineární programování

- aplikace

Výrobní plán: Cílem je určit, kolik vyrábět kterého výrobku tak, abychom maximalizovali zisk. Víme, kolik které suroviny potřebujeme na jednotlivé výrobky. Známe množství surovin, které máme k dispozici.

Dopravní plán: Cílem je určit kolik kterých výrobků přepravovat po jednotlivých trasách od výrobce ke spotřebitelům tak, abychom měli co nejnižší náklady.

Lineární programování

- aplikace II

Směšovací problém: Chceme vyrobit slitinu předepsaného složení ze surovin se známým složením tak, abychom dodrželi metalurgické předpisy a minimalizovali náklady.

Řízení zásob: Cílem je plánovat nákupy tak, abychom uspokojili poptávku a přitom minimalizovali náklady na uskladnění.

Lineární programování

- aplikace III

Regresní analýza: Cílem je proložit naměřenými hodnotami přímku tak, abychom minimalizovali maximální absolutní odchylku.

Další aplikace: Lineární programování má aplikace především v technologii (řízení výroby), ekonomice (finanční modely) a konstruování (návrh struktury).

Lineární programování

- historie

Starověk: V antice byly formulovány a pomocí geometrie řešeny některé izoperimetrické úlohy. Například:
Najděte rovnoběžník největšího obsahu při konstantním obvodu.

Středověk: Později byly formulovány zejména úlohy založené na rozkladu čísel na součet a součin tak, aby určité kritérium mělo optimální hodnotu.

Lineární programování

- historie II

Novověk: S rozvojem infinitesimálního počtu se objevily nyní klasické metody pro analytické hledání extrémů (průběh funkce aj.). Následovalo postupně rozpracování teoretických poznatků, které připravilo nástroje pro 20.století.

Lineární programování

- historie III

20.století: Koncem třicátých let Kantorovič formuloval ekonomickou úlohu pomocí lineárních omezení. Během druhé světové války byly rozpracovány základy matematických metod organizace vojenských operací. V roce 1941 Hitchcock formuloval dopravní úlohu, v roce 1945 formuloval Stiegler dietní problém. V roce 1947 Dantzig formuloval úlohu později nazvanou Koopmansem úlohou lineárního programování. Navrhl algoritmus nazvaný simplexová metoda pro její řešení. V diskusi Dantziga a Von Neumanna byl zaveden pojem duality a následovala desetiletí bouřlivého rozvoje optimalizačních modelů a metod a jejich aplikací.

Lineární programování

- obecná formulace

Nechť jsou dány vektory $a_i, c \in \mathbb{R}^n$ a čísla $b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Poznámka: n je počet proměnných a m počet rovnic

Řešíme problém:

$$\text{opt } c^T x \quad \text{opt} \in \{\min, \max\}$$

Za předpokladů:

$$a_i^T \cdot x \leq b_i \quad (i \in I_1)$$

$$a_i^T \cdot x \geq b_i \quad (i \in I_2)$$

$$a_i^T \cdot x = b_i \quad (i \in I - I_1 - I_2)$$

$$\text{kde } I = \{1, 2, \dots, m\}; I_1 \subset I; I_2 \subset I$$

Lineární programování

- obecná formulace - příklad

Řešíme problém:

Příklad:

$$\max f(\mathbf{x}) \quad f(\mathbf{x}) = 20 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 + 140 \cdot x_4 + 40 \cdot x_5$$

Obecně:

$$\text{opt } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{opt} \in \{\min, \max\}$$

Konkrétně:

$$\max (20, 120, 100, 140, 40)^T \cdot \mathbf{x}$$

Lineární programování

- obecná formulace - příklad

Za předpokladů:

Příklad:

$$0,4 \cdot x_2 + 0,3 \cdot x_3 + 0,6 \cdot x_4 + 0,6 \cdot x_5 \leq 1500$$

$$0,05 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_3 + 0,1 \cdot x_4 \leq 300$$

$$0,1 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0,2 \cdot x_3 + 0,1 \cdot x_4 + 0,2 \cdot x_5 \leq 450$$

$$x_1 \geq 100$$

$$x_5 \geq 200$$

Obecně:

$$a_i^T \cdot x \leq b_i \quad (i \in I_1)$$

$$a_i^T \cdot x \geq b_i \quad (i \in I_2)$$

$$a_i^T \cdot x = b_i \quad (i \in I - I_1 - I_2)$$

$$\text{kde } I = \{1, 2, \dots, m\}; I_1 \subset I; I_2 \subset I$$

Lineární programování

- obecná formulace - příklad

Konkrétně:

$$(0, 0.4, 0.3, 0.6, 0.6)^T \cdot \mathbf{x} \leq 1500$$
$$(0.05, 0.2, 0.1, 0.1, 0)^T \cdot \mathbf{x} \leq 300$$
$$(0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 0.2)^T \cdot \mathbf{x} \leq 450$$
$$(1, 0, 0, 0, 0)^T \cdot \mathbf{x} \geq 100$$
$$(0, 0, 0, 0, 1)^T \cdot \mathbf{x} \geq 200$$

Poznámka:

$$n = 5$$
$$m = 5$$
$$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$I_1 = \{1, 2, 3\}$$
$$I_2 = \{4, 5\}$$

Lineární programování

- standardní tvar

Obecnou formulaci úlohy lze zapsat v tzv. standardním tvaru:

Řešíme problém:

$$\min c^T x$$

Za předpokladů:

$$A \cdot x = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$x \geq 0$$

Lineární programování

- standardní tvar II

Vztahy, využité při přepsání na standardní tvar:

max \rightarrow min

$$\max f(\mathbf{x}) = - \min -f(\mathbf{x})$$

Přepis rovnic:

$$\mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{x} \geq b_i \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{x} \leq -b_i$$

Lineární programování

- standardní tvar III

Nerovnost na rovnost:

$$a_i^T \cdot \mathbf{x} \leq b_i \quad \Rightarrow \quad a_i^T \cdot \mathbf{x} + x_{n+1} = b_i, \text{ kde: } x_{n+1} \geq 0$$

kde x_{n+1} je umělá proměnná, která se začlení do vektoru proměnných \mathbf{x}

\Rightarrow nový vektor obsahuje prvky x_1, x_2, \dots, x_n původního vektoru \mathbf{x} a navíc pro každou i -tou nerovnost člen x_{n+1}

původní vektor \mathbf{x} : (x_1, x_2, \dots, x_n)

nový vektor \mathbf{x} : $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$

Lineární programování

- standardní tvar - příklad

Příklad:

$$(0, 0.4, 0.3, 0.6, 0.6)^T \cdot \mathbf{x} \leq 1500$$

$$(0.05, 0.2, 0.1, 0.1, 0)^T \cdot \mathbf{x} \leq 300$$

$$(0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 0.2)^T \cdot \mathbf{x} \leq 450$$

Přepis rovnic na tvar $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 300 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Lineární programování

- další definice

Množina přípustných řešení:

$$S = \{\mathbf{x}; \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq 0\}$$

V rámci této množiny minimalizujeme funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

Přípustné řešení $\mathbf{x}^* \in S$ nazveme *optimálním řešením* úlohy, jestliže:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \quad \forall \mathbf{x} \in S$$

Lineární programování

- řešení úlohy

Grafické řešení

Nejstarší metoda pro řešení úloh LP.

Lze použít pro úlohy se dvěma případně třemi proměnnými.

Přístup vhodný pro manuální řešení, obtížně automatizovatelný.

Simplexová metoda

Nejčastěji používaný přístup.

Lze implementovat pomocí vhodného programovacího jazyka.

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení

Příklad:

Hledejte minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině
nezáporných řešení soustavy:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení II

Výpočet průsečíků rovnic s osami:

$$\text{Rovnice } 2.x_1 + x_2 \geq 2:$$

$$P_{x_1}^1 = (1, 0), P_{x_2}^1 = (0, 2)$$

$$\text{Rovnice } -3.x_1 + 2.x_2 \leq 6:$$

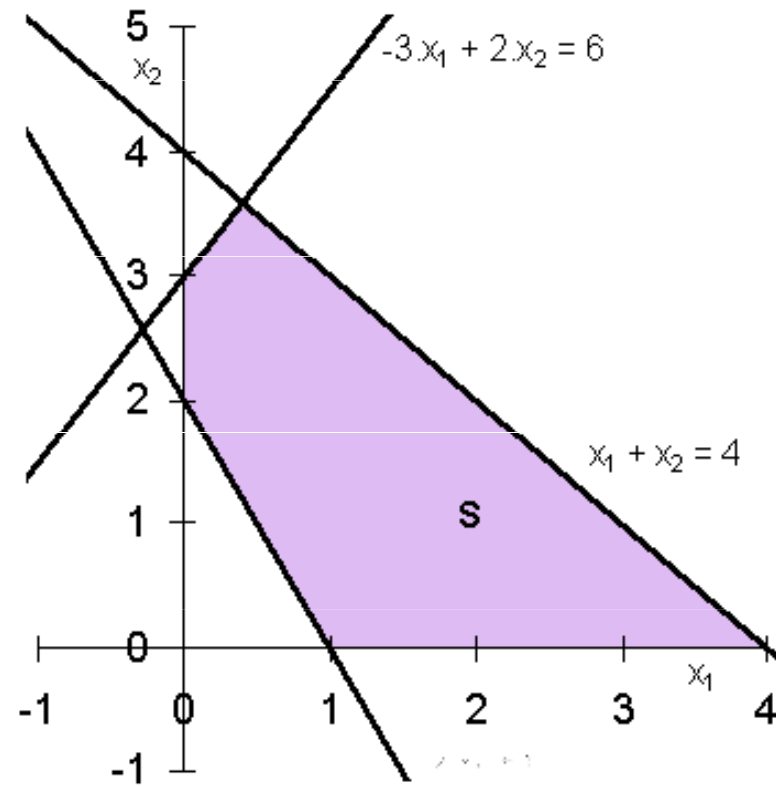
$$P_{x_1}^2 = (-2, 0), P_{x_2}^2 = (0, 3)$$

$$\text{Rovnice } x_1 + x_2 \leq 4:$$

$$P_{x_1}^3 = (4, 0), P_{x_2}^3 = (0, 4)$$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení III



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení IV

Množinu S tedy tvoří pětiúhelník s vrcholy:

$[0, 2]$; $[0, 3]$; $[1, 0]$; $[4, 0]$ a průsečík rovnic:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$-3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6$$

\Rightarrow

$[2/5, 18/5]$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení V

Hledáme minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině S .

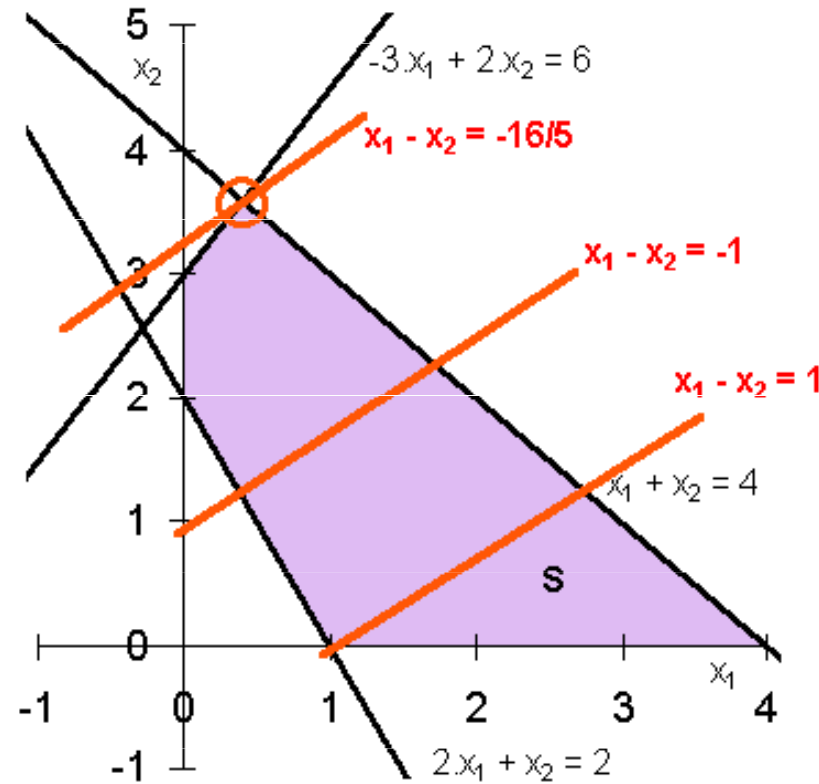
Znázorníme-li soustavu rovnoběžek:

$$x_1 - x_2 = k \quad \text{pro } k \in S$$

zjistíme, že funkce $f(x) = x_1 - x_2$ nabývá nejmenší hodnoty na množině S ve vrcholu $[2/5, 18/5]$.

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení VI



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení VII

Příklad 2:

Hledejte minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině
nezáporných řešení soustavy:

$$2.x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-3.x_1 + 2.x_2 \leq 6$$

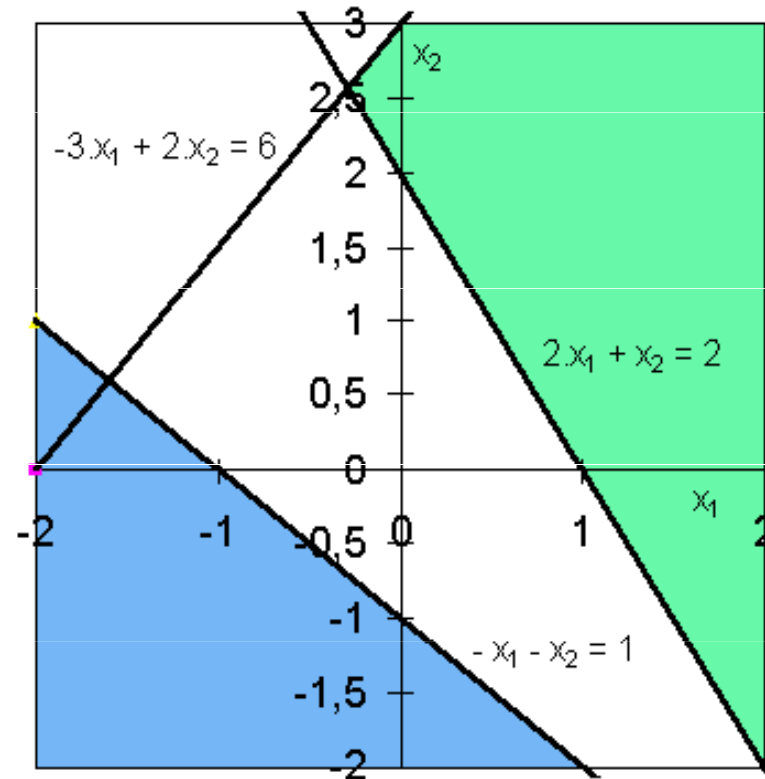
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení VIII



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení IX

Hledáme minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině S .

Ale z předchozího obrázku je jasné, že $S = \emptyset$
 \Rightarrow nelze najít optimální řešení

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení X

Příklad 3:

Hledejte minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině
nezáporných řešení soustavy:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 2$$

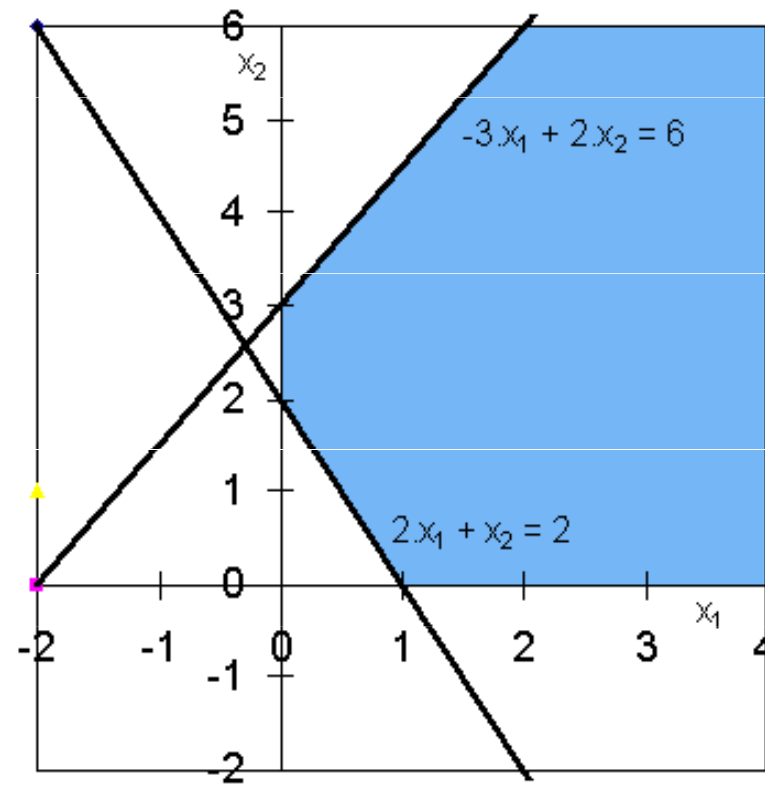
$$-3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení XI



Lineární programování

- řešení úlohy - grafické řešení XII

Hledáme minimum funkce $f(x) = x_1 - x_2$ na množině S .

Ale z předchozího obrázku je jasné, že množina S je nekonečná

\Rightarrow nelze najít optimální řešení

Lineární programování

- simplexová metoda - teorie

DEF:

Množina $S \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, pokud $\forall x_1, x_2 \in S$:
 $\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2 \in S$ pro každé $\lambda \in [0, 1]$.

DEF:

Bod $\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$ pro $\lambda \in [0, 1]$ se nazývá
konvexní kombinací x_1 a x_2 .

Lineární programování

- simplexová metoda - teorie II

DEF:

Konvexní obal množiny S je nejmenší konvexní množina obsahující S. Označuje se **conv(S)**.

DEF:

Množina $P \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní polyedr**, pokud P je konvexním obalem konečné množiny.

Lineární programování

- simplexová metoda - teorie III

DEF:

Simplex je konvexní polyedr $P = \text{conv} \{v_0, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$,
kde $v_m - v_0, \dots, v_1 - v_0$ jsou lineárně nezávislé. Pokud
tedy $m = n$, jde o konvexní obal $n + 1$ bodů s
nenulovým objemem v \mathbb{R}^n .

DEF:

Polyedrická množina je průnikem konečného počtu
poloprostorů (lze je zapsat ve tvaru $\{x \in \mathbb{R}^n; a^T x \geq \alpha\}$,
kde $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$).

Je zřejmé, že množina přípustných řešení každé úlohy
lineárního programování je polyedrická.

Lineární programování

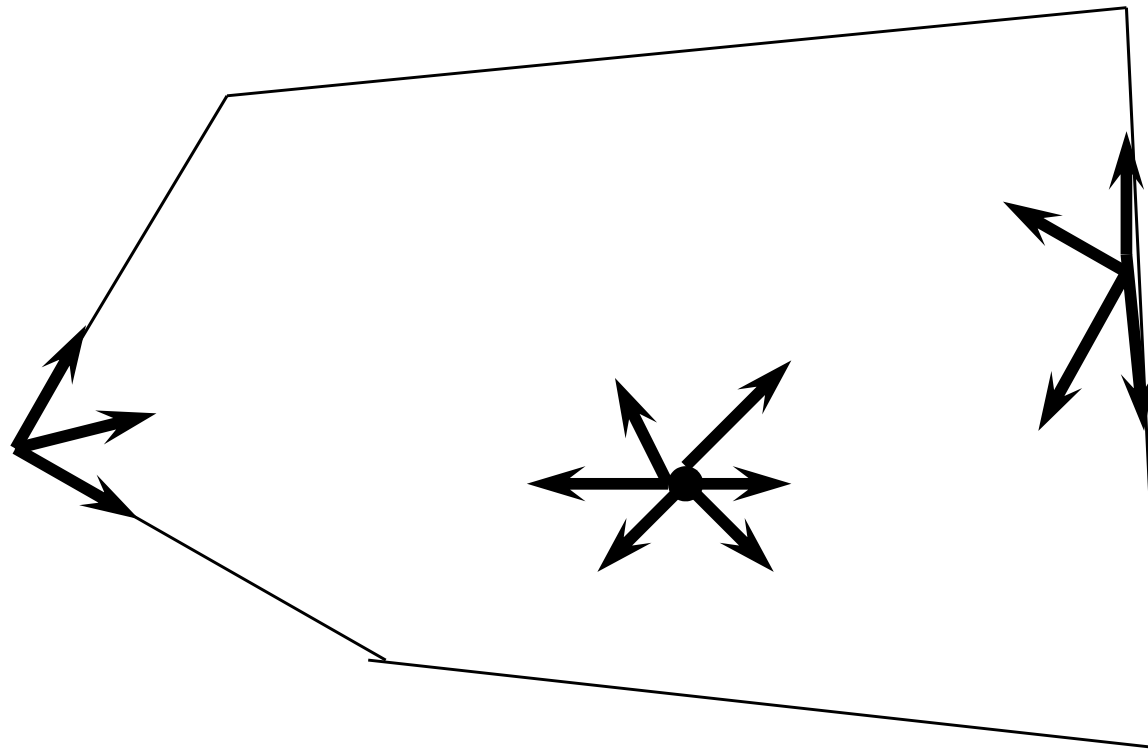
- simplexová metoda - teorie IV

DEF: Krajní bod konvexní množiny $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je prvek S , který není netriviální konvexní kombinací dvou různých bodů z S . Neexistuje $y_1, y_2 \in S, y_1 \neq y_2, \lambda \in (0, 1): x = \lambda \cdot y_1 + (1 - \lambda) \cdot y_2$.

Lineární programování

- simplexová metoda - teorie IV

DEF: **Směr** (v bodě $x \in S$) v uzavřené konvexní množině $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je takový nenulový vektor $d \in \mathbb{R}^n$, pro který $\exists \alpha > 0: x + \alpha \cdot d \in S$.

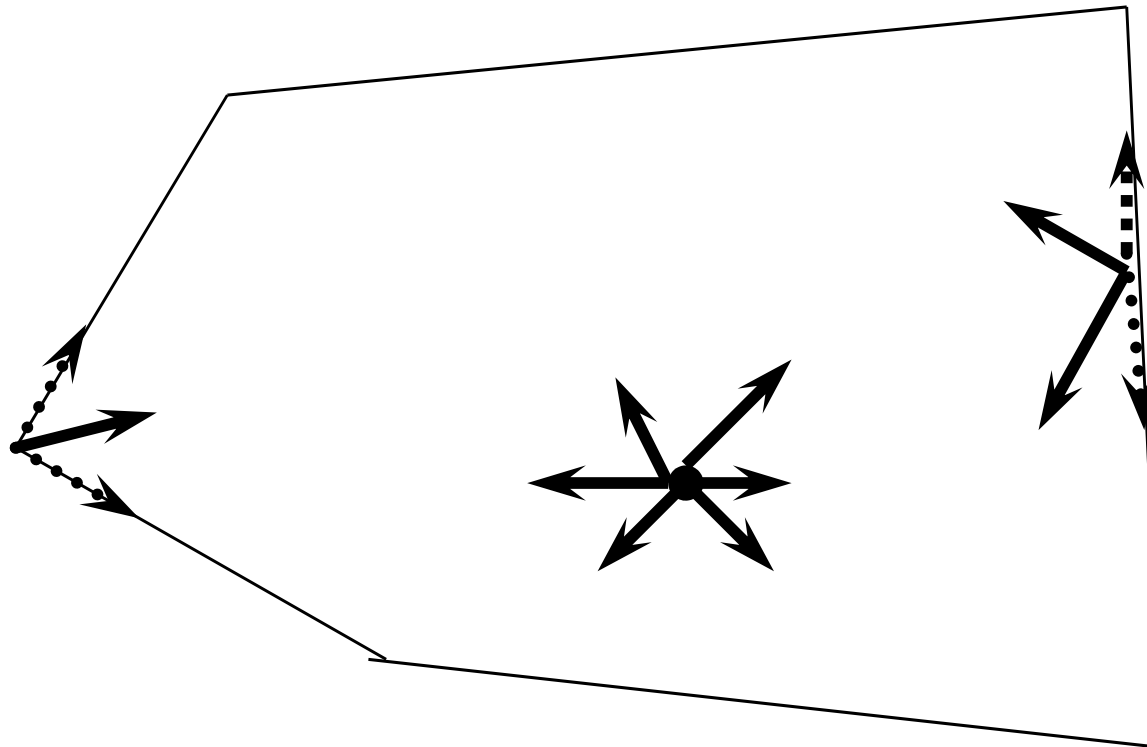


Lineární programování

- simplexová metoda - teorie V

DEF:

Krajní směr je směr, který není kladnou lineární kombinací dvou různých směrů.



Lineární programování

- simplexová metoda - teorie VI

Věta:

Kladná lineární kombinace směrů je opět směrem:

Je-li $\alpha_1, \alpha_2 > 0$:

$$x + \alpha_1 \cdot d_1 \in S$$

$$\Rightarrow x + \alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2 \in S$$

$$\Rightarrow x + \beta \cdot (\alpha_1 \cdot d_1 + \alpha_2 \cdot d_2) \in S \text{ pro } \beta \geq 0.$$

DEF:

Krajní směr je směr, který není kladnou lineární kombinací dvou různých směrů.

Cvičení

- příklad I

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

$$- \mathbf{x}_1 + 3 \mathbf{x}_2 \leq 9$$

$$2\mathbf{x}_1 + 3 \mathbf{x}_2 \leq 18$$

$$2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \leq 10$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0$$

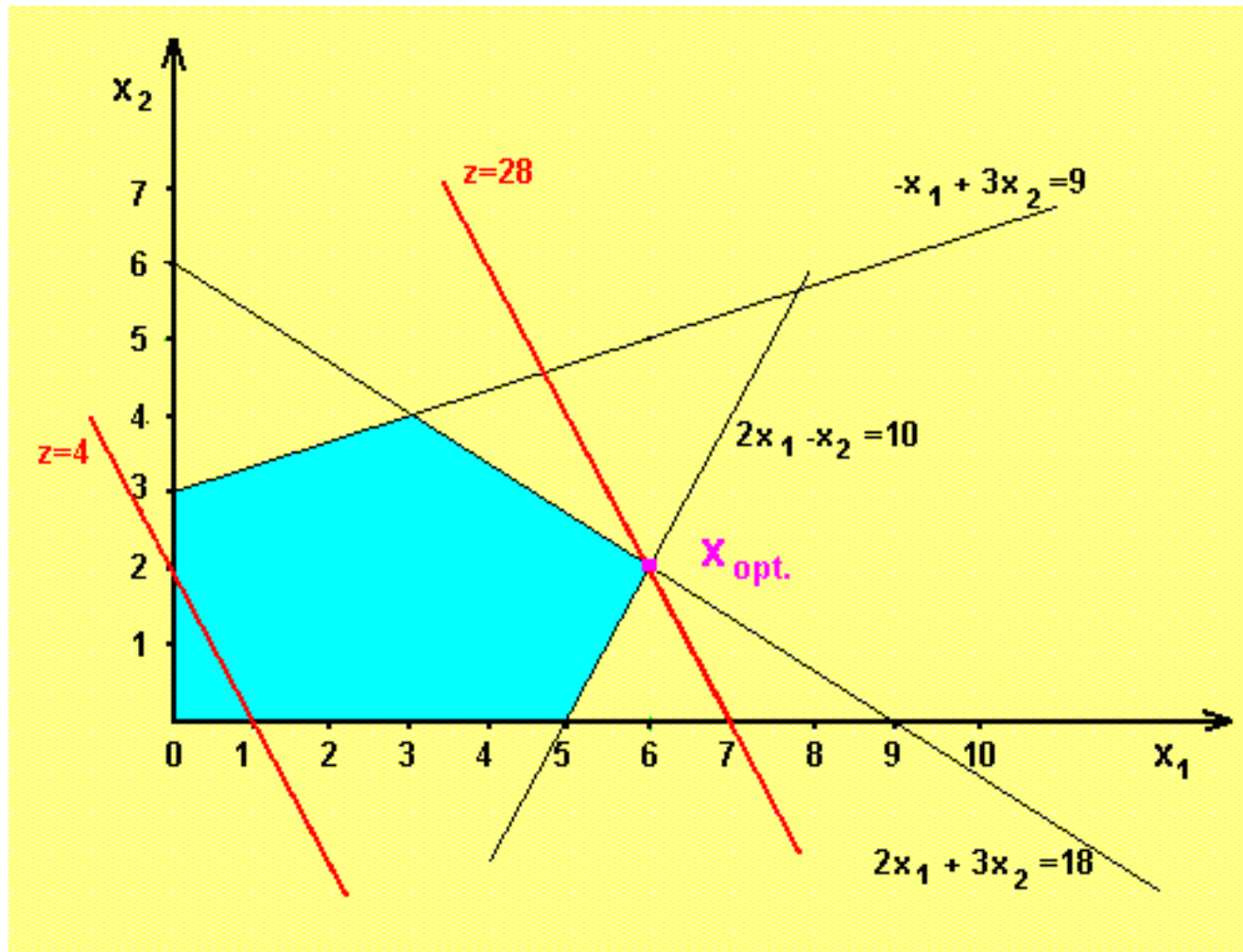
$$\mathbf{x}_2 \geq 0$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(\mathbf{x}) = 4 \mathbf{x}_1 + 2 \mathbf{x}_2$$

Cvičení

- příklad I - 2



Optimální řešení:

$$x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad z = 28$$

Cvičení

- příklad II

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

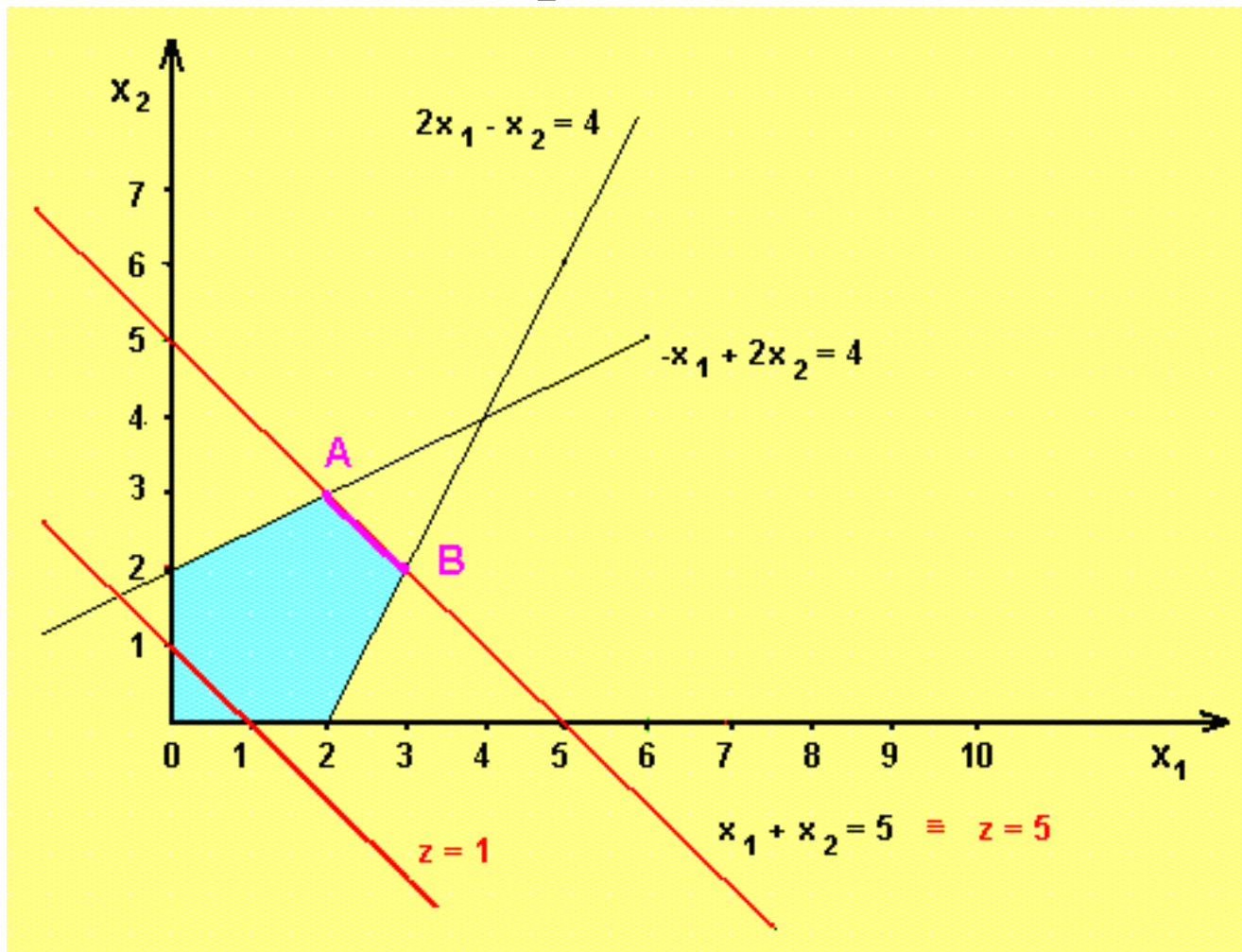
$$x_2 \geq 0$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(x) = x_1 + x_2$$

Cvičení

- příklad II - 2



Optimální řešení: Úloha má nekonečně mnoho optimálních řešení - všechny body úsečky AB, pro které účelová funkce $z = 5$.

Cvičení

- příklad III

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \geq 4$$

$$-2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \leq 2$$

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \leq 0$$

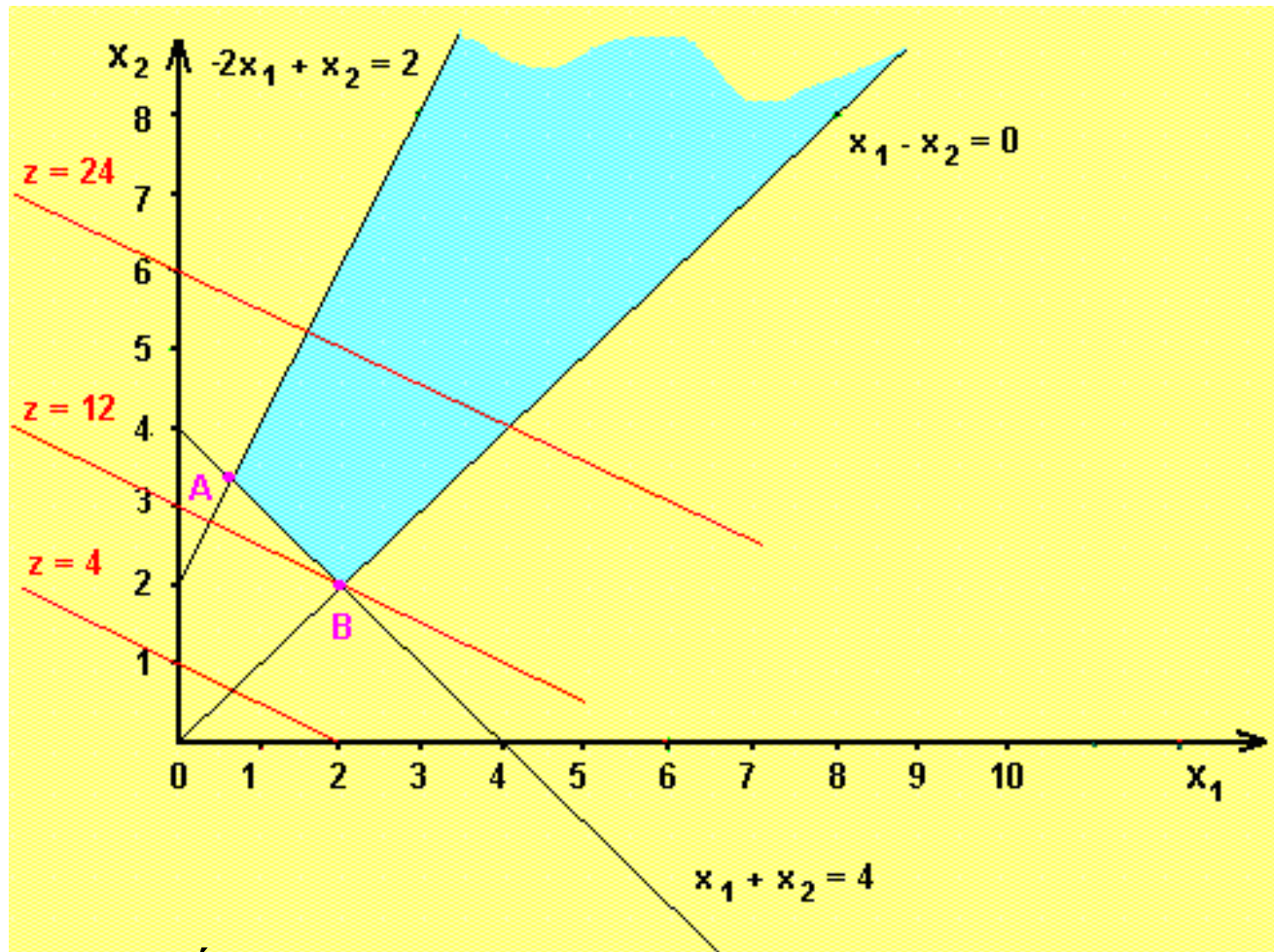
$$\mathbf{x}_1 \geq 0$$

$$\mathbf{x}_2 \geq 0$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$$

Cvičení příklad III - 2



Optimální řešení: Úloha nemá konečné optimální řešení, účelová funkce může na neomezené množině přípustných řešení nabývat libovolně velkých hodnot. V případě, že bychom řešili minimalizační problém, tj. hledali minimum funkce $z = 2x_1 + 4x_2$ při stejných omezujících podmínkách, optimální řešení by odpovídalo bodu B.

Cvičení

- příklad IV

Podnik vyrábí 4 druhů výrobků. Jsou to výrobky V_1 , V_2 , V_3 a V_4 . Spotřebovává k tomu materiál m (kg) a práci p (hodiny). Pro výrobky platí:

	V1	V2	V3	V4
Materiál [kg]	4	1	2	2
Práce [hodiny]	2	5	1	3
Cena [Kč]	5	8	3	4

Každý den je k dispozici 30 kg materiálu a 50 hodin práce. V jakém množství vyrábět V_1 , V_2 , V_3 a V_4 tak, aby byl maximální zisk.

Cvičení

- příklad IV - 2

Matematická formulace úlohy:

Hledáme tedy nezáporné hodnoty proměnných $x_j \geq 0$

($j = 1, 2, 3, 4$), vyhovující nerovnostem:

$$4.x_1 + x_2 + 2.x_3 + 2.x_4 \geq 30 \quad (\text{omezení na materiál})$$

$$2.x_1 + 5.x_2 + x_3 + 3.x_4 \geq 50 \quad (\text{omezení na práci})$$

a maximalizující účelovou funkci:

$$f(x) = 5.x_1 + 8.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4$$

Cvičení

- příklad V

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

$$2 \cdot x_1 - x_2 \leq 2$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(x) = x_1 - x_2$$

Cvičení

- příklad VI

Matematická formulace úlohy:

Podmínky:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 60$$

Maximalizace účelové funkce:

$$f(x) = 4 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2$$