

Lineární programování

- charakteristika krajních bodů

Necht' $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $h(A) = m$.

$x \in S$ je krajní bod $S \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow po permutaci sloupců matice A (a odpovídajících složek vektoru x) lze matici A vyjádřit jako $A = (B \mid N)$, tak že platí:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

kde $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je regulární a $B^{-1} \cdot b \geq 0$.

Lineární programování

- vlastnosti krajních bodů

Nechť $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \} \neq \emptyset$.

Pak platí:

- a) Existuje krajní bod množiny S .
- b) Každý krajní bod množiny S má nejvýše m kladných složek.
- c) Množina S má nejvýše $\binom{n}{m}$ krajních bodů.

Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad

Příklad:

$$\max 4x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

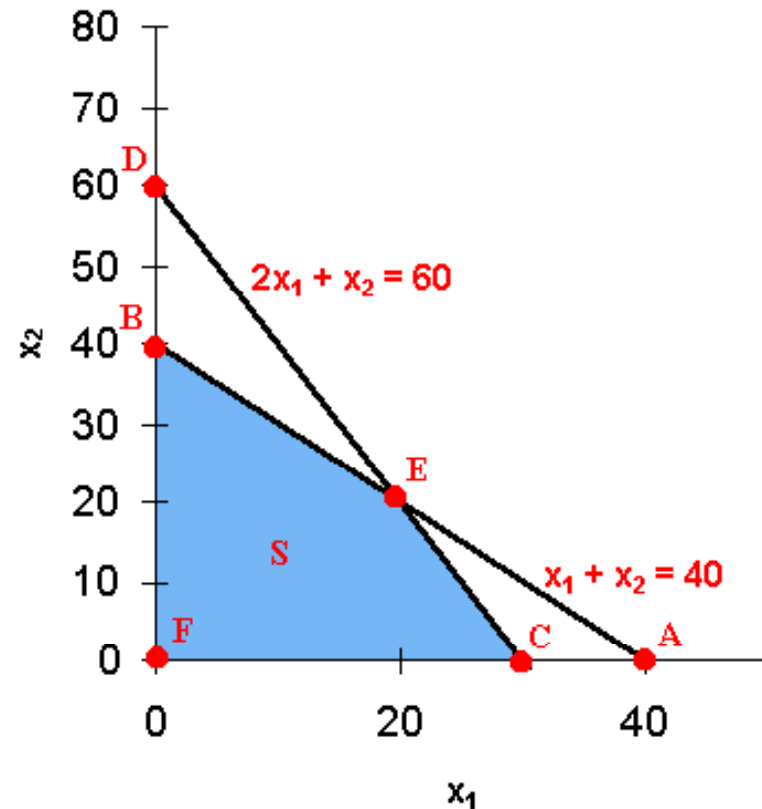
$$2x_1 + x_2 \leq 60$$

Přepis rovnic na standardní tvar:

$$\min (-4 \quad -3 \quad 0 \quad 0) \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$



Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad II

Následující tabulka uvádí přehled **bázických proměnných** x_B (zbylé proměnné x_N označujeme jako **nebázické proměnné**), **bázickou matici** B a odpovídající **bázické řešení** x .

Dále je uvedeno, zda je bázické řešení přípustné tj. splňuje $x \geq 0$ (zkratka **BFS** značí **basic feasible solution**).

Nakonec uvádíme, kterým bodům grafu přísluší daná bázická řešení, zda se jedná o krajní body a kterými omezeními jsou body určeny.

Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení

Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad III

Tabulka bázických proměnných:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_1, x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(20 \ 20 \ 0 \ 0)$	ano	E	ano	AEB, CED
x_1, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$(30 \ 0 \ 10 \ 0)$	ano	C	ano	CED, ACF
x_1, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(40 \ 0 \ 0 \ -10)$	ne	A	ne	ABD, ACF

Lineární programování

- charakteristika krajních bodů - příklad IV

Tabulka bázických proměnných - 2. část:

x_B	B	x	BFS	graf	krajní	omezení
x_2, x_3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(0 \ 60 \ -20 \ 0)$	ne	D	ne	CED, DBF
x_2, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$(0 \ 40 \ 0 \ 20)$	ano	B	ano	AEB, DBF
x_3, x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(0 \ 0 \ 40 \ 60)$	ano	F	ano	DBF, ACF

Lineární programování

- charakteristika krajních směrů

Nechť $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $h(A) = m$.

$d \in \mathbb{R}^n$ je krajní směr v $S \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow po permutaci sloupců matice A (a odpovídajících složek vektoru x) lze matici A vyjádřit jako $A = (B \mid N)$, tak že $B^{-1} \cdot a_j \leq 0$ pro některý sloupec a_j matice N a platí:

$$d = \alpha \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$$

kde $\alpha > 0$ a $e_j = (\varepsilon_{j,1}, \dots, \varepsilon_{j,n-m})$ a dále $\varepsilon_{j,j} = 1$ a $\varepsilon_{j,i} = 0$ pro $i \neq j$.

Lineární programování

- vlastnosti krajních směrů

Necht' $S = \{ x \mid Ax = b, x \geq 0 \} \neq \emptyset$.

Pak platí:

Množina S má nejvýše $\binom{n}{m}^{(n-m)}$ krajních směrů.

Lineární programování

- věta o reprezentaci

Věta o reprezentaci:

Necht' $S = \{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \} \neq \emptyset$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $h(A) = m$
a necht' $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jsou všechny krajní body S a $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_l$
všechny krajní směry S .

Pak platí $\mathbf{x} \in S \Leftrightarrow$

$\exists \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \exists \mu_j \geq 0$ tak, že:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^l \mu_j \mathbf{d}_j$$

Lineární programování

- základní věta LP

Základní věta lineárního programování:

Mějme úlohu lineárního programování ve standardním tvaru, $h(A) = m$, $S \neq \emptyset$. Necht' x_1, \dots, x_k jsou všechny krajní body S a d_1, \dots, d_l všechny krajní směry S .

Pak existuje $\min\{c^T x; x \in S\} \Leftrightarrow$

$$c^T d_j \geq 0 \quad \text{pro } \forall j = 1, \dots, l$$

Jestliže existují optimální řešení, pak existuje mezi nimi alespoň jeden krajní bod.

Lineární programování

- metody nalezení minima

- Přímá metoda
- Simplexová metoda.

Přímá metoda:

- najdeme všechny krajní body
- spočítáme hodnotu účelové funkce pro tyto body
- má-li úloha optimální řešení, je jím krajní bod s největší hodnotou účelové funkce

Lineární programování

- přímá metoda

Problém při této metodě spočívá v tom, že počet krajních bodů s rostoucím počtem proměnných rychle narůstá:

N proměnných $\Rightarrow 2^N$ kandidátů na krajní bod

Vyhledat všechny krajní body znamená vybrat z matice A všechny regulární submatice řádu m a vyřešit pro každou z nich soustavu:

$$B \cdot x_B = b$$

Pokud je její řešení nezáporné, získali jsme (po doplnění nulovými složkami) krajní bod množiny M .

Lineární programování

- přímá metoda 2

Takový postup je numericky schůdný jen pro úlohy malé dimenze.

Navíc nemáme předem zaručenou existenci optimálního řešení, takže nalezené nejlepší základní řešení nemusí být řešením optimálním.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip

Prochází krajní body množiny přípustných řešení jistým racionálním způsobem (například nikdy nepřejde do bodu s vyšší funkční hodnotou).

Způsob procházení množiny přípustných řešení lze snadno popsat geometricky:

- Předpokládejme, že máme krajní bod x_0 množiny přípustných řešení M .
- Z tohoto krajního bodu vychází konečné množství hran množiny M , z nichž každá buď obsahuje buď jediný další krajní bod množiny M , nebo je neomezená.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip II

- Jestliže na některé neomezené hraně existuje bod, pro který je hodnota účelové funkce nižší než $c^T x_0$, nemá úloha optimální řešení a postup končí.
- V opačném případě hledáme sousední krajní bod, pro který je hodnota kritériální funkce nižší než $c^T x_0$.
- Necht' je to krajní bod x_1 . Pak stejný postup, který jsme dosud aplikovali na bod x_0 , aplikujeme nyní na bod x_1 .
- Pokud neexistuje sousední krajní bod s vlastností $c^T x > c^T x_0$, je x_0 hledaným optimálním řešením.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip III

Princip:

$$x = (x_B, x_N), \quad x_N = 0, \quad x_B \in \mathbb{R}^m, \quad x_N \in \mathbb{R}^{m-n}$$

$$A = (B \mid N), \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad N \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}, \quad B \text{ je regulární}$$

Krok metody = výměna jedné nebázové proměnné (z x_N)
za bázovou proměnnou (z x_B) tak, aby $c^T x$ kleslo.

Výměna znamená, že tato dosud bázová proměnná pak
bude mít hodnotu 0, a ta dosud nebázová nějakou
kladnou hodnotu \Rightarrow budeme opět v krajním bodě.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip IV

- Jak vybrat nebázovou proměnnou, kterou přesuneme do báze?

Pomocí redukovaného cenového vektoru :-).

Odvození vztahu pro redukovaný cenový vektor:

=> Vyjádříme $c^T x$ za předpokladu $Ax = b$ pouze pomocí proměnné x_N .

Lineární programování

- simplexová metoda - princip V

\Rightarrow Vyjádříme $c^T x$ za předpokladu $Ax = b$ pouze pomocí proměnné x_N .

$$\text{Platí: } (B \mid N) (x_B, x_N)^T = b$$

$$\Rightarrow B \cdot x_B + N \cdot x_N = b$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1} \cdot (b - N \cdot x_N)$$

$$c^T x = c_B^T \cdot x_B + c_N^T \cdot x_N = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot (b - N \cdot x_N) + c_N^T \cdot x_N =$$

$$= c_B^T \cdot B^{-1} \cdot b + (c_N - N^T \cdot B^{-T} \cdot c_B)^T \cdot x_N =$$

$$= \text{konst.} + d_N$$

kde d_N je **redukovaný cenový vektor**

Lineární programování

- simplexová metoda - princip VI

Pokud jsou všechny složky x_B kladné a některá složka (například $d_{N,i}$) vektoru d_N záporná, můžeme snížit hodnotu $c^T x$ tím, že do x_B přesuneme $x_{N,i}$.

Teoreticky můžeme zvolit libovolnou složku $x_{N,i}$ s $d_{N,i} < 0$.

Pokud neexistuje v d_N záporná složka, aktuální bod x je minimem.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip VII

Pokud je zde více než jedna záporná složka, pak v ideálním případě zvolíme tu složku, která vede k největšímu poklesu $c^T x$.

Existuje mnoho heuristik pro výběr vhodné složky.
Například Dantzigovo pravidlo:

Zvolte tu složku d_N , která má co největší zápornou hodnotu.

Lineární programování

- simplexová metoda - princip VIII

Pokud máme vybrán index i složky vektoru x_N , kterou přesuneme do báze, musíme vypočítat hodnotu $x_{N,i}$:

$$x_{N,i} = \min_{j=1\dots m} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_j}{(B^{-1}N_i)_j} : (B^{-1}N_i)_j > 0 \right\}$$

Pomocí této hodnoty můžeme dopočítat x_B :

$$x_B = B^{-1} \cdot (b - N_i \cdot x_{N,i})$$

Lineární programování

- simplexová metoda - algoritmus

0) Najdi nějaký krajní bod $x = (x_B, x_N)$, $x_N = 0$ a $Ax = b$.

1) Vypočítej redukovaný cenový vektor:

$$d_N = (c_N - N^T \cdot B^{-T} \cdot c_B)^T$$

Pokud $d_N \geq 0$, pak jsme v minimu

jinak zvol i tak, aby $d_i = \min_k d_k$

2) Vypočítej $x_{N,i}$ a x_B .

3) Pro první j , pro které $x_{B,j} = 0$ vyměň $x_{N,i}$ a $x_{B,j}$.

4) Jdi na 1).

Lineární programování

- simplexová metoda - dvoufázová

ad 0): Pro výběr prvního krajního bodu lze rovněž využít minimalizační algoritmus \Rightarrow tzv. **dvoufázová metoda**.

I) Řešení pomocné úlohy:

$$\min \sum_{i=1}^m r_i \text{ za předpokladu } r = Ax - b, x \geq 0, r \geq 0$$

II) Řešení $\min c^T x$ za předpokladu $Ax = b, x \geq 0$.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka

Při ručním řešení úloh se velmi dobře osvědčuje uspořádání výpočtů do tzv. *simplexové tabulky*, která obsahuje koeficienty soustavy **m+1** lineárních rovnic ve standardním tvaru o **n+1** neznámých.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka

	$f(x)$	x_1	x_2	\dots	x_n	
x_{k1}						
\dots						
x_{km}						
$f(x)$						

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka

Do hlavičky simplexové tabulky píšeme označení všech proměnných (první z nich je proměná $f(x)$).

Do prvního sloupce píšeme označení proměnných, které tvoří v příslušném kroku zkoumaný krajní bod (= tzv. základní řešení).

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II

Do posledního sloupce píšeme pravé strany soustavy lineárních rovnic.

Poslední řádka odpovídá rovnici pro účelovou funkci.

Vstupující proměnné odpovídá v tabulce tzv. **klíčový sloupec**.

Řádek, obsahující vystupující proměnnou, je **klíčový řádek**.

Prvek ležící v průsečíku klíčového řádku a klíčového sloupce nazveme **klíčovým prvkem**.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - iniciace

Mějme úlohu LP ve
standardním tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n) \cdot \mathbf{x} = f(\mathbf{x})$$

Do simplexové tabulky
ji zapíšeme takto:

	$f(\mathbf{x})$	x_1	x_2	...	x_n	
x_{k1}	0	a_{11}	a_{21}	...	a_{1n}	b_1
:	:	:	:		:	:
x_{km}	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
$f(\mathbf{x})$	1	c_1	c_2	...	c_n	0

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - výpočet

Kritérium pro to, zda je řešení optimální, dává řádka $f(x)$. Pokud obsahuje záporné koeficienty, není řešení optimální.

Vstupující proměnná (proměnná, která se přidá do báze) je ta, která má největší zápornou hodnotu v posledním řádku.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II

Vystupující proměnnou určíme tak, že dělíme postupně čísla v posledním sloupci tabulky čísly z klíčového sloupce, pokud jsou tato čísla kladná. Zvolíme tu proměnnou, pro niž vyjde nejmenší hodnota.

V dalším řešení postupujeme takto:

V prvním sloupci nahradíme označení vystupující proměnné označením vstupující proměnné.

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - simplexová tabulka II

Prvky v řádku vstupující proměnné dostaneme tak, že dělíme prvky klíčového řádku klíčovým prvkem

Prvky v ostatních řádcích dostaneme tak, že od každého řádku odečteme takový násobek řádu vstupující proměnné, aby v klíčovém sloupci byly nuly (kromě jedničky v řádku vstupující proměnné)

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - příklad

Nalézt maximum funkce: $f(x) = 4x_1 + 2x_2$

Za podmínek: $-x_1 + 3x_2 \leq 9$; $2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$2x_1 - x_2 \leq 10$; $x_1, x_2 \geq 0$

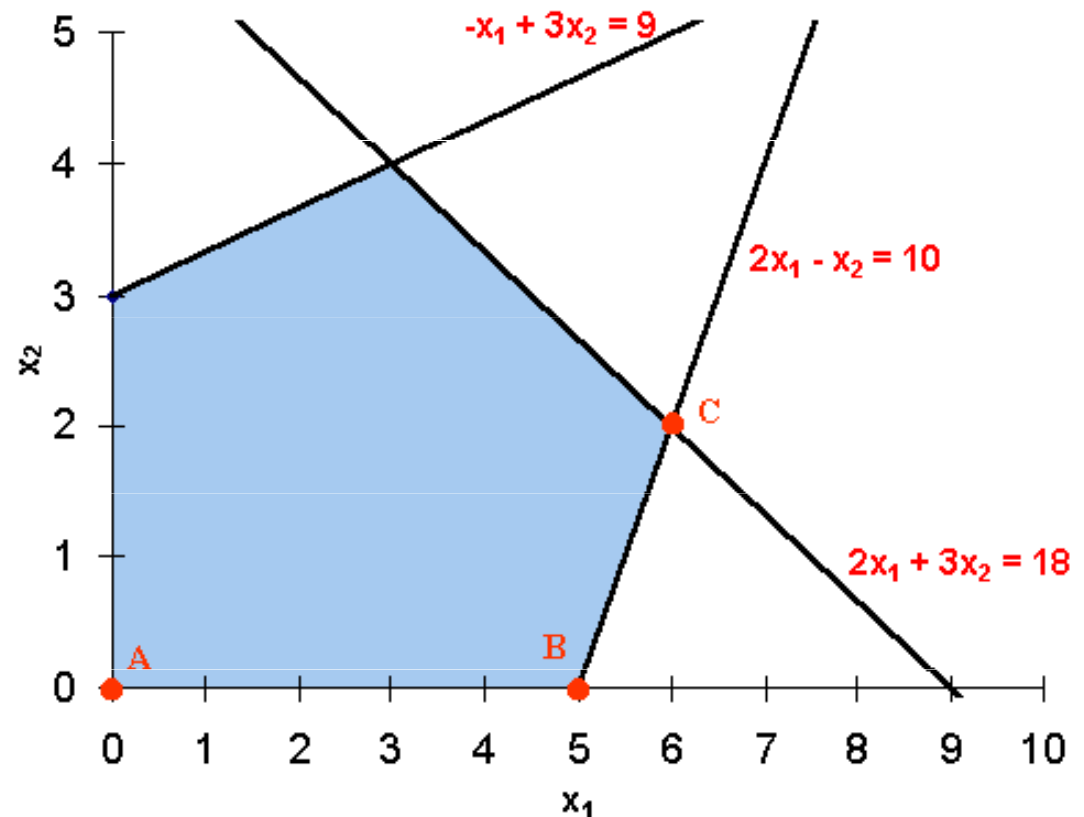
Standardní tvar rovnic:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$$

$$f(x) - 4x_1 - 2x_2 = 0$$



Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - příklad

Standardní tvar rovnic:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 9; \quad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 18$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10; \quad f(x) - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

Do simplexové
tabulky je
zapíšeme
takto:

I.	f(x)	x₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
x ₃	0	-1	3	1	0	0	9
x ₄	0	2	3	0	1	0	18
x₅	0	2	-1	0	0	1	10
f(x)	1	-4	-2	0	0	0	0

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - příklad

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

I.	f(x)	x₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
x ₃	0	-1	3	1	0	0	9
x ₄	0	2	3	0	1	0	18
x₅	0	2	-1	0	0	1	10
f(x)	1	-4	-2	0	0	0	0

Výchozí základní řešení:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 9, x_4 = 18, x_5 = 10, f(x) = 0$$

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - příklad

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

II.	f(x)	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
x ₃	0	0	5/2	1	0	1/2	14
x ₄	0	0	4	0	1	-1	8
x ₁	0	1	-1/2	0	0	1/2	5
f(x)	1	0	-4	0	0	2	20

Výchozí základní řešení:

$$x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 14, x_4 = 8, x_5 = 0, f(x) = 20$$

Lineární programování

- simplexová metoda - praxe - příklad

Do simplexové tabulky je zapíšeme takto:

III.	f(x)	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
x ₃	0	0	0	1	-5/8	9/8	9
x ₄	0	0	1	0	1/4	-1/4	2
x ₁	0	1	0	0	1/8	3/8	6
f(x)	1	0	0	0	1	1	28

Optimální řešení:

$$x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 9, x_4 = 0, x_5 = 0, f(x) = 28$$

Cvičení

- příklad 1

Nalezněte krajní body množiny přípustných řešení úlohy:

Nalézt maximum funkce:

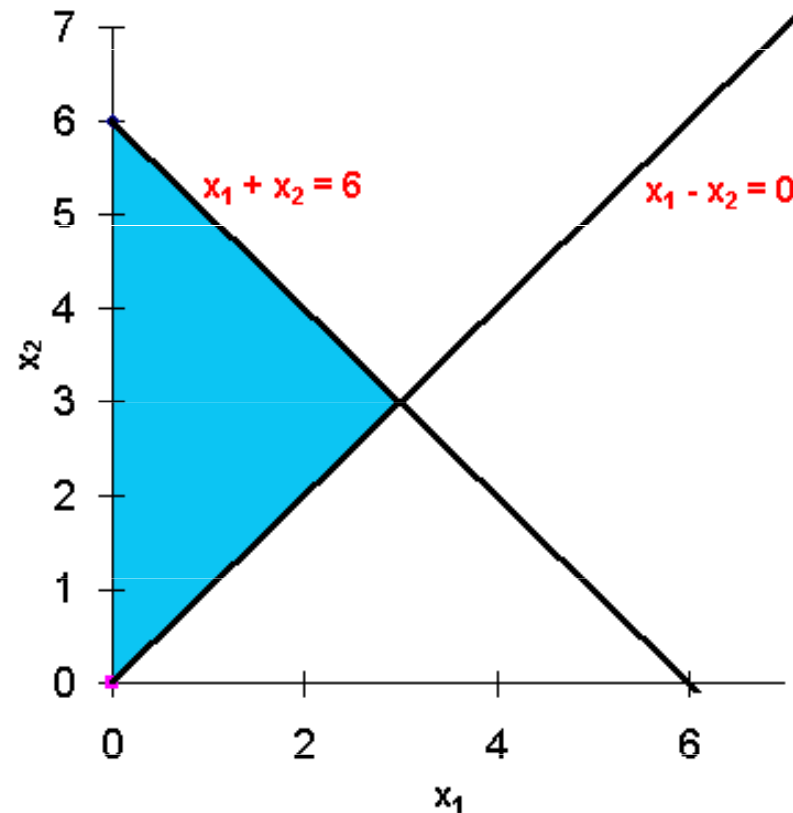
$$f(x) = 15x_1 + 2x_2$$

Za podmínek:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_i \geq 0$$



Cvičení

- příklad 2

Nalézt maximum funkce:

$$f(\mathbf{x}) = 15x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 25x_4$$

Za podmínek:

$$2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 5000$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_4 \geq 6000$$

$$10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 \geq 18000$$

$$x_i \geq 0$$