Minimalizace součtu čtverců

- úvod

Optimalizuje teoretický model tak, aby co nejvíce odpovídal naměřeným datům.

=> Minimalizuje odchylku modelu od naměřených hodnot.

Využití:

Všude, kde máme co do činění s analýzou nějakého přírodního nebo technického systému.

Minimalizace součtu čtverců

- úvod II

Naměřená data si můžeme představit jako dvojice:

$(\mathbf{t_i}, y_i)$, $i = 1, ..., m$

kde:

$\mathbf{t_i} \in R^k$ bod měření (například čas nebo místo měření nebo obojí)

y_i hodnota, naměřená v $\mathbf{t_i}$

Minimalizace součtu čtverců

- úvod III

Dále pak máme nějaký **matematický model M**:

R^{k+n} -> R, který je závislý na **n volných parametrech**

$x_1, x_2, ..., x_n$ a pro který požadujeme, aby:

$M(\mathbf{t_i}, \mathbf{x}) \approx y_i$

kde:

$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$

$i = 1, ..., m$

(m je tedy počet naměřených bodů, se kterými budeme pracovat)

Minimalizace součtu čtverců

- úvod IV

V úlohách tohoto typu tedy pro m-prvkovou množinu naměřených bodů ($\mathbf{t_i}$, y_i) hledáme parametry x_1,..., x_n modelu M tak, aby daný model co možná nejlépe popisoval tuto množinu.

=> Minimalizujeme odchylku modelu od naměřených dat.

Minimalizace součtu čtverců

- příklad

Ohmův zákon

Data: $((U_i), I_i)$ kde U_i je napětí na svorkách rezistoru a I_i je proud, který prochází rezistorem

Model: Obecně: $M(\mathbf{t_i}, \mathbf{x})$ pro data $(\mathbf{t_i}, y_i)$

Konkrétně: $M\big((U_i),(R)\big) = \frac{U_i}{R}$

Parametry modelu: $\mathbf{x} = (R)$, kde R je odpor rezistoru.

Minimalizace součtu čtverců

- příklad II

Radioaktivní rozpad

Data: $((t_i), N_i)$ kde t_i je čas od počátku měření a N_i je počet atomů v čase t_i

Model: Obecně: $M(\mathbf{t_i}, \mathbf{x})$ pro data $(\mathbf{t_i}, y_i)$

Konkrétně: $$M\big((t_i),(N_0,T)\big) = N_0.e^{-\frac{t_i}{T.\ln 2}}$$

Parametry modelu: $\mathbf{x} = (N_0, T)$, kde N_0 je počet atomů v čase 0 a T je poločas rozpadu.

Minimalizace součtu čtverců

- příklad III

Potenciální energie molekuly

Data: $((s_1,\dots, s_n), E_{pot})$ kde $s_1, \dots, s_n$ jsou souřadnice jednotlivých atomů molekuly a E_{pot} je potenciální energie molekuly

Model: Obecně: $M(\mathbf{t_i}, \mathbf{x})$ pro data $(\mathbf{t_i}, y_i)$

Konkrétně:

$$M\big((s_1,\dots,s_n),(\dots)\big) = E_{bn} + E_{an} + E_{tor} + E_{vdw} + E_{el}$$

Parametry modelu: je jich velmi mnoho – ideální vazebné vzdálenosti, vazebné úhly a torzní úhly, konstanty úměrnosti, atd ...

Minimalizace součtu čtverců

- obecně

Chceme minimalizovat odchylku modelu od naměřených dat =>

Chceme tedy, aby hodnoty rozdílù

$r_i(\mathbf{x}) = M(\mathbf{t_i}, \mathbf{x}) - y_i$

byly v absolutní hodnotì co nejmenší.

To se dá interpretovat jako minimalizace normy vektoru:

$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), ..., r_m(\mathbf{x}))^T$

Minimalizace součtu čtverců

- obecně II

Nejèastěji se používá euklidovská (L_2) norma, pro kterou dostáváme minimalizovanou funkci ve tvaru:

$$\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{r}_i(\mathbf{x})^2$$

Namísto L_2 normy je také možno použít normu L_1 (souèet absolutních hodnot r_i) nebo L_∞ (maximum z absolutních hodnot r_i). Tyto normy mají svoje opodstatnìní: napøíklad L_1 norma lépe eliminuje body mìøení, které „uletìly“, tj. jsou výraznì mimo prùbìh zadaný ostatními body, èasto v dùsledku chyby pøi mìøení. V pøednáškách budeme dále pracovat pouze s Euklidovskou normou.

Minimalizace součtu čtverců

- obecně III

Na funkce typu:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(\mathbf{x})^2$$

je možno přímo aplikovat minimalizační metody, probrané v předchozích kapitolách. Při výpočtech ale můžeme ušetřit mnoho času i paměti tím, že využijeme speciální vlastnosti tohoto problému :-).

Minimalizace součtu čtverců

- obecně IV

Gradient funkce f se dá vyjádøit jako:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 2\sum_{i=1}^{m} \nabla r_i(\mathbf{x}).r_i(\mathbf{x}) = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^T.\mathbf{r}(\mathbf{x})$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \in R^{n\times m}$ je *Jakobiho matice* funkce $f(\mathbf{x})$

(i-tý øádek matice $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ je gradient r_i v bodì $\mathbf{x}$).

Hessián funkce f se pak dá zapsat jako:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 2\sum_{i=1}^{m} \nabla r_i(\mathbf{x}).\nabla r_i(\mathbf{x})^T + 2\sum_{i=1}^{m} \nabla^2 r_i(\mathbf{x}).r_i(\mathbf{x})$$

Minimalizace součtu čtverců

- obecně V

Pokud je model M v dobré shodì s daty, pak v minimu **x*** má funkce f velmi malou (kladnou) hodnotu. Pak tedy $r_i(\mathbf{x})$ jsou malá èísla a v okolí **x*** se proto dá zanedbat druhá suma ve vztahu:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 2\sum_{i=1}^{m} \nabla r_i(\mathbf{x}).\nabla r_i(\mathbf{x})^T + 2\sum_{i=1}^{m} \nabla^2 r_i(\mathbf{x}).r_i(\mathbf{x})$$

Hessián funkce f pak může být aproximován jako:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \approx 2\sum_{i=1}^{m} \nabla r_i(\mathbf{x}).\nabla r_i(\mathbf{x})^T = 2\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

Minimalizace součtu čtverců

- Gauss-Newtonovy metody

Metody, které kombinují tuto aproximaci s Newtonovskými metodami se nazývají **Gauss-Newtonovy metody**.

Klasický Newtonovský vztah pro výpočet směru přesunu ($\mathbf{s}^{k}$) z bodu $\mathbf{x}^{k}$ do bodu $\mathbf{x}^{k+1}$:

$$\mathbf{G}^{(k)}.\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)}$$

je tedy přeformulován na vztah:

$$\mathbf{J}^{(k)^{T}}.\mathbf{J}^{(k)}.\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{J}^{(k)^{T}}.\mathbf{r}^{(k)}$$

Minimalizace součtu čtverců

- Levenberg-Marquardtovy metody

Použití dané aproximace v metodě s omezeným krokem dává **Levenberg-Marquardtovu metodu pro součet čtverců**. Původně byla Levenberg-Marquardtova metoda vyvinuta právě pro tuto aplikaci. Rovnice:

$$\left(\mathbf{G}^{(k)} + \nu\mathbf{I}\right)\delta^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)}$$

kterou využívá Levenberg-Marquardtova metoda se v tomto speciálním případě přepisuje do tvaru:

$$\left(\mathbf{J}^{(k)^{T}}.\mathbf{J}^{(k)} + \nu\mathbf{I}\right)\delta^{(k)} = -\mathbf{J}^{(k)^{T}}.\mathbf{r}^{(k)}$$

Lineární úloha nejmenších čtverců
- úvod

V tomto případě je model lineární vzhledem k aproximovaným parametrùm:

$M(t_i, \mathbf{x}) = \phi_1(t_i).x_1 + ... + \phi_n(t_i).x_n$

Pro odchylku modelu od reálného výsledku měření platí:

$\Rightarrow r_i(\mathbf{x}) = M(t_i, \mathbf{x}) - y_i = \phi_1(t_i).x_1 + ... + \phi_n(t_i).x_n - y_i$

Funkce, kterou budeme v rámci metody minimalizovat, má tedy tvar:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(\mathbf{x})^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[\phi_1(t_i).x_1 + \ldots + \phi_n(t_i).x_n - y_i\right]^2$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úvod II

Budeme tedy minimalizovat funkci:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \left[\phi_1(t_i).x_1 + \ldots + \phi_n(t_i).x_n - y_i\right]^2$$

V minimu musí pro všechny parametry $x_1, \ldots, x_n$ modelu platit:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

Po odderivování tedy platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} 2.\phi_j(t_i).\left[\phi_1(t_i).x_1 + \ldots + \phi_n(t_i).x_n - y_i\right] = 0$$

Lineární úloha nejmenších čtverců
- úvod III

Rovnici:

$$\sum_{i=1}^{m} 2.\phi_j(t_i).\left[\phi_1(t_i).x_1 + \ldots + \phi_n(t_i).x_n - y_i\right] = 0$$

budeme dále upravovat:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i.\phi_j(t_i) = \sum_{i=1}^{m} \left[\phi_1(t_i).x_1 + \ldots + \phi_n(t_i).x_n\right].\phi_j(t_i) =$$

$$= x_1.\sum_{i=1}^{m} \phi_1(t_i).\phi_j(t_i) + \ldots + x_n.\sum_{i=1}^{m} \phi_n(t_i).\phi_j(t_i)$$

Soustavu rovnice v tomto tvaru můžeme zapsat pomocí matice:

$A.x = b$

Lineární úloha nejmenších čtverců
- úvod IV

Soustavu rovnic:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i.\phi_j(t_i) = x_1.\sum_{i=1}^{m} \phi_1(t_i).\phi_j(t_i) + \ldots + x_n.\sum_{i=1}^{m} \phi_n(t_i).\phi_j(t_i)$$

lze zapsat ve tvaru A.x = b následovně:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \phi_k(t_i).\phi_j(t_i) \qquad\qquad b_k = \sum_{i=1}^{m} y_i.\phi_j(t_i)$$

kde $k, j \in \{1, \ldots, n\}$

Můžeme tedy obejít náročný proces minimalizace a získat minimum přímo řešením této soustavy.

Lineární úloha nejmenších čtverců

- příklad

Chceme řešit tento problém:

Mějme objekt, pohybující se v čase t rychlostí v.

Naměřili jsme, že objekt se v čase

$t_1 = 1s$	pohyboval rychlostí	$v_1 = 1$ m/s
$t_2 = 2s$	pohyboval rychlostí	$v_2 = 6$ m/s
$t_3 = 3s$	pohyboval rychlostí	$v_3 = 2$ m/s

Pohyb tohoto objektu považujeme za rovnoměrně zrychlený a můžeme ho tedy modelovat pomocí vztahu:

$v = a.t + v_0$, kde:

a zrychlení objektu

v_0 počáteční rychlost objektu

Úkolem je určit parametry a a v_0.

Lineární úloha nejmenších čtverců
- příklad II

Obecný vztah pro model:

$$M(t_i, \mathbf{x}) = \phi_1(t_i).x_1 + ... + \phi_n(t_i).x_n$$

můžeme tedy v našem případě přepsat do tvaru:

$$M(t_i, (a, v_0)) = \phi_1(t_i).a + \phi_2(t_i).v_0 = a.t + v_0$$

=> $n = 2$

Pro ϕ_1 a ϕ_2 tedy platí:

$$\phi_1(t_i) = t_i$$

$$\phi_2(t_i) = 1$$

Lineární úloha nejmenších čtverců
- příklad III

Měřením jsme získali 3 body: (1, 1); (2, 6) a (3, 2) (=> m = 3)

Problém lze obecně zapsat pomocí soustavy n rovnic A.x = b

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \phi_k(t_i).\phi_j(t_i) \quad b_k = \sum_{i=1}^{m} y_i.\phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \ldots, n\}$$

V našem případě tedy bude platit:

$a_{11} = t_1.\ t_1 + t_2.\ t_2 + t_3.\ t_3 = 14$

$a_{12} = t_1 + t_2 + t_3 = 6$

$a_{21} = t_1 + t_2 + t_3 = 6$

$a_{22} = 1 + 1 + 1 = 3$

$b_1 = y_1.\ t_1 + y_2.\ t_2 + y_3.\ t_3 = 19$

$b_2 = y_1 + y_2 + y_3 = 9$

$x_1 = a$

$x_2 = v_0$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- příklad IV

Budeme tedy řešit soustavu rovnic:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 19 \\ 6 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Řešení: $a = 0.5\ \mathrm{m/s^2}$

$v_0 = 2\ \mathrm{m/s}$

Součet čtverců odchylek:

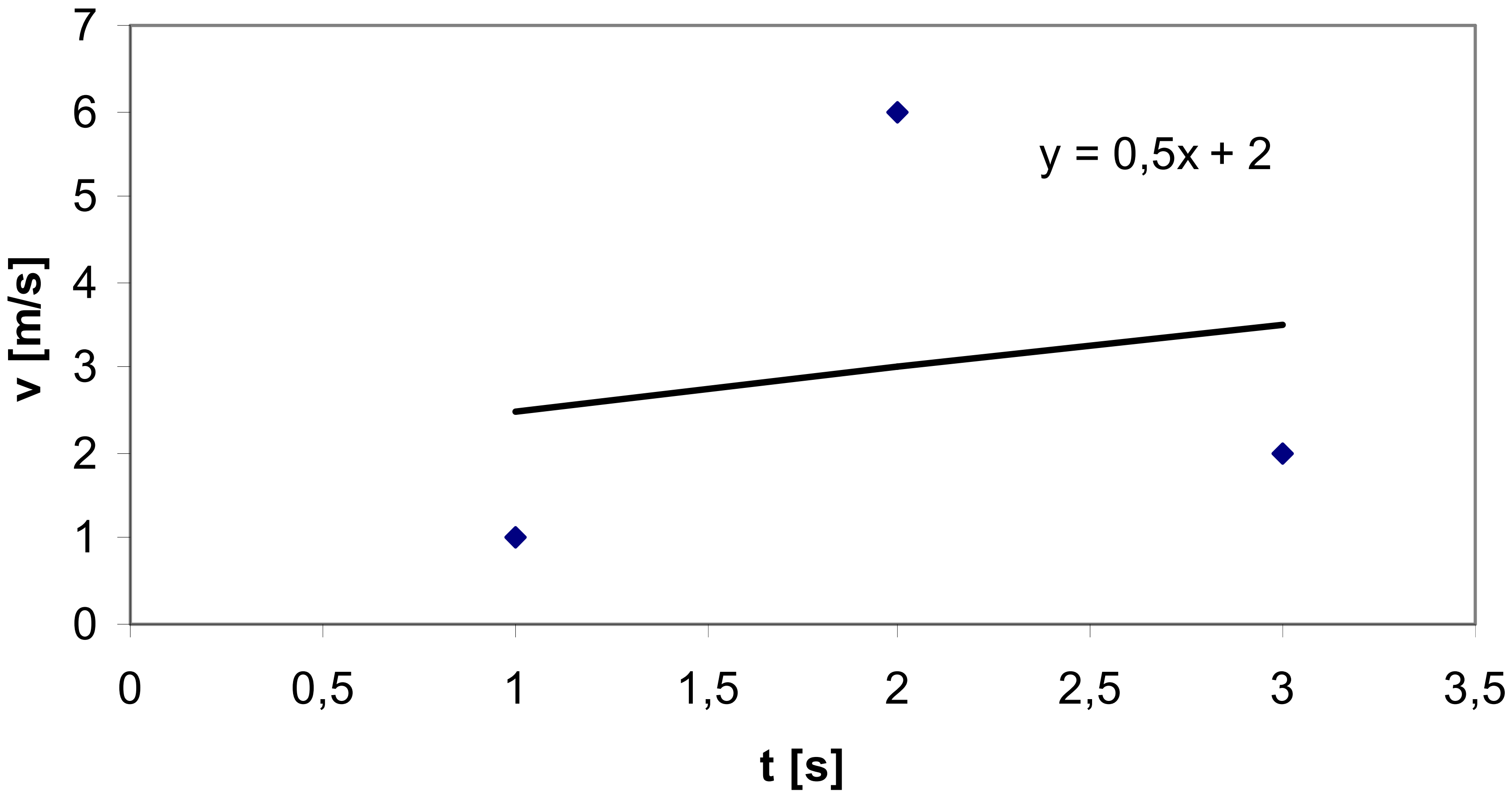
$$S = \sum_{i=1}^{m} \left(M(t_i, \mathbf{x}) - y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left((a.t_i + v_0) - y_i \right)^2 =$$

$$= (0{,}5.1 + 2 - 1)^2 + (0{,}5.2 + 2 - 6)^2 + (0{,}5.3 + 2 - 2)^2 =$$

$$= 1{,}5^2 + (-3)^2 + 1{,}5^2 = 13{,}5$$

Lineární úloha nejmenších čtverců
- příklad V

Grafické znázornění výsledku:



Lineární úloha nejmenších čtverců

- úlohy se dvěma parametry

S tímto typem úloh se setkáváme v praxi velmi často, jedná se o úlohy typu:

Máte zadáno m bodů (t_i, y_i), proložte těmito body přímku.

= nalezněte koeficienty k a q v rovnici y = k.t + q.

V tomto případě lze obecnou soustavu rovnic A.x = b

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \phi_k(t_i).\phi_j(t_i) \qquad b_k = \sum_{i=1}^{m} y_i.\phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \dots, n\}$$

Pøepsat do tvaru:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i.t_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

Lineární úloha nejmenších čtverců
- úlohy se dvěma parametry II

Řešením této soustavy:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i . t_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

Pak získáme pro k a q vztahy:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i . t_i - \dfrac{\sum_{i=1}^{m} t_i . \sum_{i=1}^{m} y_i}{m}}{\sum_{i=1}^{m} t_i^2 - \dfrac{\sum_{i=1}^{m} t_i . \sum_{i=1}^{m} t_i}{m}} \qquad q = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i - k . \sum_{i=1}^{m} t_i}{m}$$

Lineární úloha nejmenších čtverců

- úlohy se dvěma parametry III

Příklad:

Zadání stejné jako u předchozího příkladu o „objektu, pohybujícím se v čase t rychlostí v".

Máme tedy body: (1, 1); (2, 6) a (3, 2) a chceme jimi proložit přímku: $v = a.t + v_0$

Konkrétní výpočet:

$$\sum_{i=1}^{3} v_i.t_i = 19 \qquad \sum_{i=1}^{3} t_i = 6 \qquad \sum_{i=1}^{3} v_i = 9 \qquad \sum_{i=1}^{3} t_i^2 = 14$$

$$k = \frac{19 - \frac{6.9}{3}}{14 - \frac{6.6}{3}} = 0{,}5 \qquad q = \frac{9 - 0{,}5.6}{3}$$

Kvadratická úloha nejmenších čtverců

- úloha se třemi parametry

Naměřenými body tedy chceme proložit rovnici:

$y = a.t^2 + b.t + c$

Analogicky jako v lineárním případě lze i v kvadratickém případě tuto speciální úlohu zapsat pomocí soustavy rovnic A.x = b, a to následovně:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^4 & \sum_{i=1}^{m} t_i^3 & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^3 & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i & cm \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

Kvadratická úloha nejmenších čtverců

- úloha se třemi parametry II

Metodou nejmenších čtverců najděte polynom 2.stupně, který je nejblíže bodům:

[1,1], [2,3], [4,6].

Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^4 & \sum_{i=1}^{m} t_i^3 & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^3 & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i & m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

Kvadratická úloha nejmenších čtverců

- úloha se třemi parametry III

=> soustava:

$$\begin{aligned} 273a + 73b + 21c &= 109 \\ 73a + 21b + 7c &= 31 \\ 21a + 7b + 3c &= 10 \end{aligned}$$

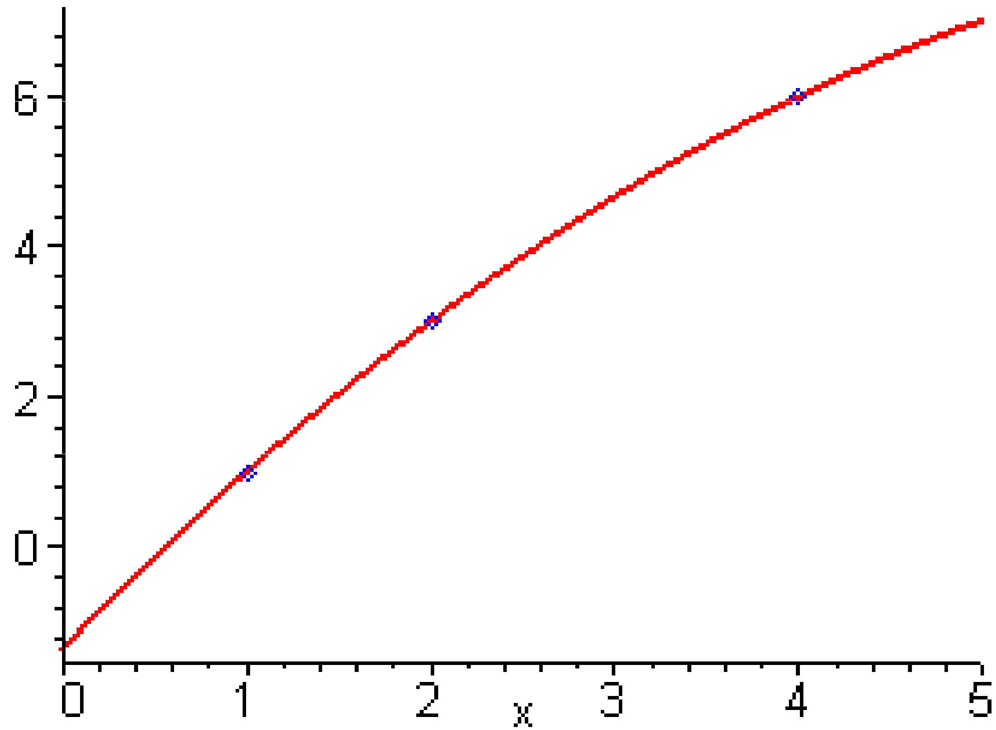
Výsledek je:

a = -1/6,

b = 5/2,

c = -4/3.

$$y = \frac{-1}{6}t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{4}{3}$$



Cvičení
- příklad 1

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejblíže bodům: (1,1); (2,6) a (3,2)

Použijte „přímý přístup“ - vytvořit funkci, odderivovat, derivaci položit rovnu nule, dořešit :-).

Řešení: Hledáme přímku ve tvaru y = kx + q

Minimalizovaná funkce:

$$f(k,q) = \sum_{i=1}^{n} (t_i . k + q - y_i)^2$$

$$f(k,q) = (k + q - 1)^2 + (2k + q - 6)^2 + (3k + q - 2)^2$$

$$f(k,q) = 14k^2 + 12kq - 38k + 3q^2 - 18q + 41$$

Cvičení
- příklad 1 II

Derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 28k + 12q - 38 \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 12k + 6q - 18$$

Řešíme tedy $0 = 28k + 12q - 38$ a $0 = 12k + 6q - 18$

Minimum je v bodě k = 0.5 a q = 2

Cvičení
- příklad 2

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejblíže bodům: (1, 2); (2, 2.3) a (3, 3)

Vytvořte soustavu rovnic A.x = b a vyřešte ji, obecně:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \phi_k(t_i).\phi_j(t_i) \quad b_k = \sum_{i=1}^{m} y_i.\phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Cvičení

- příklad 2

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejblíže bodům: (1, 2); (2, 2.3) a (3, 3)

Vytvořte soustavu rovnic A.x = b a vyřešte ji, obecně:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \phi_k(t_i).\phi_j(t_i) \quad b_k = \sum_{i=1}^{m} y_i.\phi_j(t_i) \quad \text{kde } k, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Soustava:

$a_{11} = 14$ $a_{12} = 6$ $a_{21} = 6$ $a_{22} = 3$

$b_1 = 15{,}6$ $b_2 = 7{,}3$

Řešení: $k = 0{,}5$ $q = 1{,}43$

Cvičení
- příklad 3

Metodou nejmenších čtverců najděte přímku, která je nejblíže bodům: (-2,0); (0,1) a (2,3)

Využijte vztahy:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i - k.\sum_{i=1}^{m} t_i}{m} \qquad k = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i.t_i - \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i.\sum_{i=1}^{m} y_i}{m}}{\sum_{i=1}^{m} t_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{m} t_i.\sum_{i=1}^{m} t_i}{m}}$$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i t_i = 6 \qquad \sum_{i=1}^{3} t_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{3} y_i = 4 \qquad \sum_{i=1}^{3} t_i^2 = 8$$

$$k = \frac{6 - \frac{0.4}{3}}{8 - \frac{0.0}{3}} = 0{,}75 \qquad q = \frac{4 - \frac{3}{4}.0}{3} = 1{,}33$$

Cvičení
- příklad 4

Metodou nejmenších čtverců najděte polynom 2.stupně, který je nejblíže bodům:

[1,2], [2,0], [3,3], [4,4].

Řešení: Opět hledáme polynom ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$

Tedy řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^4 & \sum_{i=1}^{m} t_i^3 & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^3 & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i & m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} t_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i y_i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i \end{pmatrix}$$

Cvičení
- příklad 4 II

=> soustava:

$$
\begin{aligned}
354a + 100b + 30c &= 93 \\
100a + 30b + 10c &= 27 \\
30a + 10b + 4c &= 9
\end{aligned}
$$

Výsledek je:

a = 3/4,

b = -57/20,

c = 15/4.

$$y = \frac{3}{4}t^2 - \frac{57}{20}t + \frac{15}{4}$$