

1 Základní formalismy matematiky

Motivace: *Studium informatiky neznamena jen „naučit se nějaký programovací jazyk“, nýbrž zahrnuje celý soubor dalších relevantních předmětů, mezi nimiž najdeme i matematicko–teoretické (formální) základy moderní informatiky.* □

Náplní prvních dvou lekcí našeho předmětu je právě studenty do potřebných matematických formalismů uvést a dát jim tak první ochutnávku „matematiky vysokoškolské úrovně“. Tato matematika je (možná na rozdíl od vaší dosavadní středoškolské zkušenosti) založena na přesném formálním vyjadřování, chápání a odvozování a na rigorózním úsudku podloženém poctivou matematickou logikou. □

Stručný přehled lekce

- * Pochopení přirozeného i formálního zápisu a významu matematických tvrzení (vět).
- * Pochopení správného formálního způsobu argumentace v matematice (důkazů).
- * Rozbor logické struktury matematických vět a pojem výroku. Základy výrokové logiky.

1.1 Význam matematických tvrzení

Matematika (tudíž i teoretická informatika jako její součást) se vyznačuje **velmi přísnými** formálními požadavky na korektnost vyjadřování a argumentace. □

- Matematické tvrzení je obvykle vysloveno ve tvaru

„Jestliže platí *předpoklady*, pak platí *závěr*“. □

- Tomuto tvaru se odborně říká *implikace*. □
- Pro pochopení významu je klíčové vždy správně identifikovat, co jsou v dané větě ony zmíněné *předpoklady* a co je *závěrem*. □
- Příklady běžné formulace *matematických vět*:
 - * Je-li $x > 1$, pak platí $x^2 > x$. □
 - * Konečná množina má konečně mnoho podmnožin. □
 - * $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. □
 - * Graf je rovinný, jestliže neobsahuje podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$. □
- Co přesně nám uvedené matematické věty říkají?
Často pomůže pouhé rozepsání definic pojmů, které se v dané větě vyskytují.

O pravdivosti implikace

Hned na začátek výkladu zdůrazňujeme, jak moc důležité je pochopit správný logický význam matematického tvrzení vysloveného zmíněnou formou implikace („jestliže . . . , pak . . . “). □

Pravdivost takového tvrzení je třeba chápat v následujícím významu:

Pro každou situaci, ve které jsou splněny všechny předpoklady, ()
je platný i závěr tvrzení. □*

Volně řečeno, z předchozího kritéria (*) vyplývá, že pokud předpoklady nejsou splněny nebo jsou sporné, tak celé tvrzení je platné bez ohledu na pravdivost závěru!

NEPRAVDA \Rightarrow COKOLIV

Příklad 1.1. Je pravdivé následující matematické tvrzení?

Věta. *Mějme dvě kuličky, červenou a modrou. Jestliže červená kulička je těžší než modrá a zároveň je modrá kulička těžší než ta červená, tak jsou obě kuličky ve skutečnosti zelené.* □

„To přece nemůže být pravda, jak může být jedna kulička těžší než druhá a naopak zároveň? Jak mohou být nakonec obě zelené? To je celé nějaká blbost. . . “ □

Ano, výše uvedené jsou typické laické reakce na uvedenou větu. Přesto však tato věta **pravdivá je!**

Stačí se vrátit o kousek výše ke kritériu – **Pro každou situaci, ve které jsou splněny všechny předpoklady, je platný i závěr tvrzení** – které je zjevně naplněno. Nenaleznete totiž situaci, ve které by byly splněny oba předpoklady zároveň, a tudíž ve všech takových neexistujících situacích si můžete říkat cokoliv, třeba že kuličky jsou zelené.

□

Příklad 1.2. Anna a Klára přišly na přednášku a usadily se do lavic. Proč je pravdivé toto matematické tvrzení?

Věta. Jestliže Anna sedí v první řadě lavic a zároveň Anna sedí v poslední řadě lavic, tak Klára nesedí ve druhé řadě lavic. □

Opět je třeba se pečlivě zamyslet nad významem předpokladů a závěru. Avšak tentokrát není situace předpokladů tak triviálně sporná, jako byla v Příkladu 1.1. Kdy tedy mohou nastat oba předpoklady (o tom, kde sedí Anna) zároveň? □

Když první řada lavic je zároveň řadou poslední. □

Neboli posluchárna má jen (nejvýše) jednu řadu lavic a Klára tudíž v druhé řadě nemůže sedět. Pravdivost celé věty je tímto potvrzena. □

1.2 Úvod do matematického dokazování

S přísnými formálními požadavky na korektnost vyjádření a argumentace v matematice se pojí otázka, jak správně svá tvrzení zdůvodňovat.

Krátce lze říci, že korektně postavená matematická argumentace musí vést od přijatých předpokladů v elementárních krocích směrem k požadovanému závěru (a nikdy ne naopak!). □

- Uvažme matematickou *větu* (neboli tvrzení) tvaru

„Jestliže platí *předpoklady*, pak platí *závěr*“. □

- **Důkaz** této věty je konečná posloupnost tvrzení, kde
 - * každé tvrzení je buď □
 - *předpoklad*, nebo
 - obecně přijatá „pravda“ – *axiom*, nebo
 - plyne z předchozích a dříve dokázaných tvrzení podle nějakého „akceptovaného“ logického principu – *odvozovacího pravidla*; □
 - * poslední tvrzení je *závěr*.

Příklad 1.4. Uvažujme následující matematické tvrzení (které jistě už znáte).

Věta. Jestliže x je součtem dvou lichých čísel, pak x je sudé.

Poznámka pro připomenutí:

- **Sudé** číslo je celé číslo dělitelné 2, tj. tvaru $2k$.
- **Liché** číslo je celé číslo nedělitelné 2, tj. tvaru $2k + 1$. \square

Důkaz postupuje v následujících formálních krocích:

tvrzení	zdůvodnění
1) $a = 2k + 1$, k celé	předpoklad
2) $b = 2l + 1$, l celé	předpoklad \square
3) $x = a + b = 2k + 2l + 1 + 1$	z 1,2) a komutativity sčítání (axiom) \square
4) $x = 2(k + l) + 2 \cdot 1$	ze 3) a distributivnosti násobení (axiom) \square
5) $x = 2(k + l + 1)$	ze 4) a opět distributivnosti násobení \square
6) $x = 2m$, m celé	z 5) a $m = k + l + 1$ je celé číslo (axiom) \square

Příklad 1.5. Dokažte následující tvrzení:

Věta. Jestliže x a y jsou racionální čísla pro která platí $x < y$, pak existuje racionální číslo z pro které platí $x < z < y$. \square

Důkaz po krocích (s již trochu méně formálním zápisem) zní:

- 1) Necht' $z = \frac{x+y}{2} = x + \frac{y-x}{2} = y - \frac{y-x}{2}$. \square
- 2) Číslo z je racionální, neboť x a y jsou racionální.
- 3) Platí $z > x$, neboť $\frac{y-x}{2} > 0$.
- 4) Dále platí $z < y$, neboť opět $\frac{y-x}{2} > 0$.
- 5) Celkem $x < z < y$. \square

Všimněte si, že klíčový krok (1) popisuje námi vymyšlenou (prostě uhodnutou) algebraickou konstrukci, která vede k požadovanému číslu z . Zbylé kroky (2–5) pak jen snadno zdůvodňují, že nalezené z má všechny požadované vlastnosti. \square

1.3 Výroky

- Důležitým **pevným mostem** mezi běžnou mluvou a přesným matematickým formalismem je pojem výroku. □

Definice 1.6. **Výrok** v přirozené mluvě:

V běžné mluvě za **výrok** považujeme (každé) tvrzení, o kterém má smysl platně prohlásit, že je **bud'** pravdivé, **nebo** nepravdivé. □

Ukážeme si několik příkladů – které z nich jsou výroky?

- * Dnes už v Brně přšelo. □
- * Předmět FI: IB000 se vyučuje v prvním ročníku. □
- * Platí $2 + 3 = 6$. □
- * To je bez problémů. (Co?) □
- * Platí $x > 3$. □
- * Pro každé celé číslo x platí, že $x > 3$. □

Všimněte si, že pravdivost výroku by mělo být možné rozhodnout bez skrytých souvislostí (kontextu), a proto čtvrtý a pátý příklad za výroky nepovažujeme.

- Z více jednoduchých výroků vytváříme výroky složitější pomocí tzv. *logických spojek*.

Následuje několik dalších příkladů.

- * Množina $\{a, b\}$ má více než jeden prvek a není nekonečná. \square
- * Jestliže Karel váží přes 90 kg, nejedu s ním výtahem. \square
- * Jestliže má tato kráva 10 nohou, pak mají všechny domy modrou střechu.

Zastavme se na chvíli nad posledním výrokem. Co nám říká? Je pravdivý? \square Skutečně mají všechny domy modrou střechu a před námi stojí kráva s 10 nohama? \square

Přirozené vs. formální

- Schopnost porozumět podobným větám je součástí lidského způsobu uvažování a z tohoto hlediska nemá přímou souvislost s matematikou (je to „*přirozená logika*“). \square
- *Formální (matematická) logika* pak v podobném duchu definuje jazyk matematiky a přitom odstraňuje nejednoznačnosti přirozeného jazyka.

1.4 Formální výroková logika

Všimněte si, že podle Definice 1.6 každému výroku běžné mluvy lze **přiřadit logickou hodnotu** 0 (*false*) nebo 1 (*true*) a dále se nestarat o jazykový význam. . .

Proto jazykové výroky v matematice můžeme nahradit **výrokovými proměnnými**, které značíme velkými písmeny A, B, C, \dots a přiřadíme jim hodnotu 0 nebo 1. □

Definice: *Výroková formule* (značíme $\varphi, \sigma, \psi, \dots$) vzniká z výrokových proměnných pomocí **závorek** a logických spojek \neg *negace* a \Rightarrow *implikace*. □

Zároveň používáme v zápise následujících zkratk

* $\varphi \vee \psi$ (*disjunkce* / „nebo“) je jiný zápis formule $\neg\varphi \Rightarrow \psi, \square$

* $\varphi \wedge \psi$ (*konjunkce* / „a“) je jiný zápis formule $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \square$

* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi), \square$

Při zápise výrokových formulí je potřeba dávat pozor na správné závorkování, aby formule měla jednoznačný význam. Na intuitivní úrovni to ilustrujeme takto:

Správně $A, (A) \Rightarrow (B), A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B, A \vee B \vee \neg C$

a nesprávně $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ – znamená toto $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ nebo $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$?

Definice 1.8. Sémantika (význam) výrokové logiky.

Nechť *valuace* (ohodnocení) je funkce $\nu : Prom \rightarrow \{0, 1\}$ na všech (dotčených) výrokových proměnných. □ Pro každou valuaci ν definujeme funkci $\mathcal{S}_\nu(\sigma)$, *vyhodnocení* formule σ , induktivně (tj. po krocích) takto:

- $\mathcal{S}_\nu(A) = \nu(A)$ pro každé $A \in Prom$. □
- $\mathcal{S}_\nu(\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$ □
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Rightarrow \psi) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1 \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$ □

Tvrzení 1.9. *Přímým důsledkem Definice 1.8 a zkratk '∨' za $\neg\varphi \Rightarrow \psi$, '∧' za $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ a '⇔' za $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$, jsou tato fakta:*

- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \vee \psi) = 1$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ nebo $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$. □
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \wedge \psi) = 1$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$.
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ právě když platí jedna z následujících podmínek
 - * $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$,
 - * $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 0$.

□

Pravdivostní tabulky

V praxi často vyhodnocení logické výrokové formule zapisujeme do tzv. *pravdivostní tabulky*. Tato tabulka typicky má sloupce pro jednotlivé proměnné, případné „meziformule“ (pomůcka pro snazší vyplnění) a výslednou formuli. Řádků je 2^p (počet valuací), kde p je počet použitých proměnných. \square

Příklad 1.10. *Jaká je pravdivostní tabulka pro formuli $(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$?*

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

\square

Splnitelnost formulí a tautologie

Definice: Formule φ je *splnitelná*, pokud pro *některou* valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$. Formule je nespjitelná (říká se *kontradikce*), pokud není splnitelná. \square

Formule φ je *vždy pravdivá*, neboli výroková *tautologie*, psáno $\models \varphi$, pokud pro *každou* valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$. \square

Řekneme, že dvě formule φ, ψ jsou *ekvivalentní*, právě když $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$. \square

Tvrzení 1.11. *Následující formule jsou tautologiemi:*

- $\models A \vee \neg A$ \square
- $\models \neg \neg A \Leftrightarrow A$ \square
- $\models (A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ \square
- $\models (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ \square
- $\models (\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$

Jak poznáme tautologie v pravdivostní tabulce? A jak ekvivalentní formule?