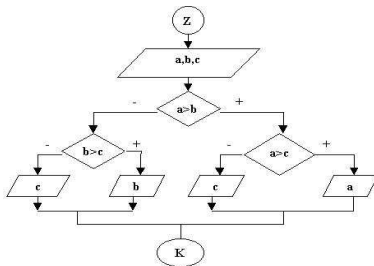


11 Formalizace a důkazy pro algoritmy

Je faktem, že situace, kdy programátorem zapsaný kód ve skutečnosti počítá něco trochu jiného, než si autor představuje, je snad nejčastější programátorskou chybou – o to zákeřnější, že ji žádný „chytrý“ překladač nemůže odhalit.

Proto již na počátku studia informatiky je žádoucí klást důraz na **správné chápání** zápisu algoritmů i na **přesné důkazy** jejich vlastností a správnosti.



Stručný přehled lekce

- * Jednoduchá formalizace pojmu algoritmus.
- * Jak dokazovat vlastnosti a správnost algoritmů.
- * Indukce při dokazování algoritmů.

11.1 Formální popis algoritmu

Před samotným závěrem kurzu si položíme otázku, co je vlastně algoritmus?

Poznámka: Za definici algoritmu je obecně přijímána tzv. *Church–Turingova teze* tvrdící, že všechny algoritmy lze „simulovat“ na Turingově stroji. Jedná se sice o přesnou, ale značně nepraktickou definici.

Mimo Turingova stroje existují i jiné *matematické modely výpočtů*, jako třeba stroj RAM, který je abstrakcí skutečného strojového kódu, nebo neprocedurální modely. □

Konvence 11.1. Zjednodušeně zde *algoritmem* rozumíme konečnou posloupnost elementárních výpočetních *kroků*, ve které každý další krok *vhodně* využívá (neboli závisí na) vstupní údaje či hodnoty vypočtené v předchozích krocích. Tuto závislost přitom pojímáme zcela obecně nejen na operandy, ale i na vykonávané instrukce v krocích.

Pro zápis algoritmu a jeho zpřehlednění a zkrácení využíváme *řídící konstrukce* – podmíněná větvení a cykly. □

Vidíte, jak blízké si jsou konstruktivní matematické důkazy a algoritmy v našem pojetí? Jedná se nakonec o jeden ze záměrů našeho přístupu...

Ukázka algoritmického zápisu

Příklad 11.2. *Zápis algoritmu pro výpočet průměru daného pole $a[]$ s n prvky.*

- Inicializujeme $sum \leftarrow 0$;
- postupně pro $i=0,1,2,\dots,n-1$ provedeme
 - * $sum \leftarrow sum+a[i]$;
- vypíšeme podíl (sum/n) . □

□

Ve „vyšší úrovni“ formálnosti se totéž dá zapsat jako:

Algoritmus 11.3. Průměr z daného pole $a[]$ s n prvky.

```
input pole a[] délky  $n \geq 1$ ;  
sum  $\leftarrow 0$ ;  
foreach  $i \leftarrow 0,1,2,\dots,n-1$  do  
    sum  $\leftarrow sum+a[i]$ ;  
done  
res  $\leftarrow sum/n$ ;  
output res .
```

Symbolický zápis algoritmů

Značení. Pro potřeby symbolického formálního zápisu algoritmů v předmětu FI: IB000 si zavedeme následující pravidla:

- *Proměnné* nebudeme deklarovat ani typovat, pole odlišíme závorkami `p[]`.
- *Přiřazení* hodnoty zapisujeme `a ← b`, případně `a := b`, ale nikdy **ne** `a=b`.
- Jako elem. operace je možné použít jakékoliv *aritmetické výrazy* v běžném matematickém zápise. Rozsahem a přesností čísel se zde nezabýváme. □
- Podmíněné *větvění* uvedeme klíčovými slovy `if ... then ... else ... fi`, kde `else` větev lze vynechat (a někdy, na jednom řádku, i `fi`).
- Pevný *cyklus* uvedeme klíčovými slovy `foreach ... do ... done`, kde část za `foreach` musí obsahovat *předem danou* množinu hodnot pro přiřazování do řídicí proměnné.
- *Podmíněný cyklus* uvedeme klíčovými slovy `while ... do ... done`. Zde se může za `while` vyskytovat jakákoliv logická podmínka. □
- V zápise používáme jasné *odsazování* (zleva) podle úrovně zanoření řídicích struktur (což jsou `if`, `foreach`, `while`).
- Pokud je to dostatečně jasné, elementární operace nebo podmínky můžeme i ve formálním zápise *popsat běžným jazykem*.

Co počítá následující algoritmus?

Příklad 11.4. Je dán následující symbolicky zapsaný algoritmus. Co je jeho výstupem v závislosti na vstupech a, b ?

Algoritmus 11.5.

```
input a, b;  
res ← 7;  
foreach i ← 1, 2, ..., b-1, b do  
    res ← res + a + 2·b + 8;  
done  
output res .
```

□ Vypočítáme hodnoty výsledku res v počátečních iteracích cyklu:

$$b = 0: \quad res = 7,$$

$$b = 1: \quad res = 7 + a + 2b + 8,$$

$$b = 2: \quad res = 7 + (a + 2b + 8) + (a + 2b + 8), \dots \square$$

Co dále? Výčet hodnot naznačuje pravidelnost a závěr, že obecný výsledek po b iteracích cyklu bude mít hodnotu

$$res = 7 + b(a + 2b + 8) = ab + 2b^2 + 8b + 7. \quad \square$$

11.2 O „správnosti“ a dokazování programů

Jak se máme přesvědčit, že je daný program počítá „správně“? □

- Co třeba ladění programů? □
Jelikož počet možných vstupních hodnot je (v principu) neohraničený, **nelze otestovat** všechna možná vstupní data. □
- Situace je zvláště komplikovaná v případě paralelních, randomizovaných, interaktivních a nekončících programů (operační systémy, systémy řízení provozu apod.). Takové systémy mají **nedeterministické chování** a opakované experimenty vedou k různým výsledkům.
Nelze je tudíž ani rozumně ladit... □
- V některých případech je však třeba mít **naprostou jistotu**, že program funguje tak jak má, případně že splňuje základní bezpečnostní požadavky. □
 - * Pro „malé“ algoritmy je možné podat přesný matematický důkaz. □
 - * Narůstající složitosti programových systémů si pak vynucují vývoj jiných „spolehlivých“ formálních **verifikačních metod**. □

Mimoходом, co to vlastně znamená „počítat správně“?

Ukázka formálního důkazu algoritmu

Příklad 11.6. Je dán následující symbolicky zapsaný algoritmus. Dokažte, že jeho výsledkem je „výměna“ vstupních hodnot a, b .

Algoritmus 11.7.

```
input a, b;  
a ← a+b;  
b ← a-b;  
a ← a-b;  
output a, b. □
```

Pro správný formální důkaz si musíme nejprve uvědomit, že je třeba symbolicky odlišit od sebe proměnné a, b od jejich daných vstupních hodnot, třeba h_a, h_b . Nyní v krocích algoritmu počítáme hodnoty proměnných:

$$* a = h_a, b = h_b,$$

$$* a \leftarrow a + b = h_a + h_b, \quad b = h_b, \quad \square$$

$$* a = h_a + h_b, \quad b \leftarrow a - b = h_a + h_b - h_b = \underline{h_a}, \quad \square$$

$$* a \leftarrow a - b = h_a + h_b - h_a = \underline{h_b}, \quad b = h_a,$$

Tímto jsme s důkazem hotovi. □

11.3 Rekurzivní algoritmy

- * Rekurentní vztahy posloupností, stručně uvedené v Oddíle 5.1, mají svou přirozenou obdobu v **rekurzivně zapsaných algoritmech**. □
- * Zjednodušeně řečeno to jsou algoritmy, které se v průběhu výpočtu odvolávají na výsledky sebe sama pro jiné (menší) vstupní hodnoty. □
- * U takových algoritmů je zvláště důležité kontrolovat jejich správnost a také praktickou proveditelnost (časovou i paměťovou). □

Příklad 11.8. *Symbolický zápis jednoduchého rekurzivního algoritmu.*

Algoritmus .

```
function faktorial(x):  
    if  $x \leq 1$  then  $t \leftarrow 1$ ;  
    else  $t \leftarrow x \cdot \text{faktorial}(x-1)$ ;  
return t .
```

Co je výsledkem výpočtu? □

Jednoduše řečeno, výsledkem je **faktoriál** vstupní přirozené hodnoty x , tj. hodnota $x! = x \cdot (x - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. □

Fibonacciho čísla

Pro jiný příklad rekurze se vrátíme k Oddílu 5.1, kde byla zmíněna známá Fibonacciho posloupnost $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$. Nyní tuto posloupnost budeme uvažovat již od jejího nultého členu, tj. jako $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$. □

Algoritmus 11.9. Rekurzivní výpočet členů Fibonacciho posloupnosti.

Pro dané přirozené $x \geq 0$ vypočítáme x -té Fibonacciho číslo následovně:

```
function fibonacci(x):  
    if x < 2 then t ← x;  
    else t ← fibonacci(x-1)+fibonacci(x-2);  
return t. □
```

Správnost Algoritmu 11.9 je víceméně zřejmá z jeho přímé podoby s rekurentním vzorcem v definici Fibonacciho čísel. Zamyslete se však, jak je to s praktickou „proveditelností“ takového algoritmu...

Co třeba $fibonacci(40)$ nebo $fibonacci(50)$?

Příklad 11.10. Nerekurzivní algoritmus pro Fibonacciho čísla.

Dokažte, že následující algoritmus pro každé přirozené n počítá tutéž hodnotu jako rekurentní funkce `fibonacci(n)` v Algoritmu 11.9.

Algoritmus .

```
input n;
b[0] ← 0;  b[1] ← 1;
foreach i ← 2,3,...,n do
    b[i] ← b[i-1]+b[i-2];
done
output b[n] . □
```

Indukcí budeme dokazovat, že po i -té iteraci cyklu algoritmu bude vždy platit $b[i] = fibonacci(i)$. Co se týče báze indukce, tato vyplývá z úvodního přiřazení □

- * Pro libovolné $i \geq 1$ pak předpokládáme platnost našeho indukčního předpokladu $b[j] = fibonacci(j)$ pro $j \in \{i, i-1\}$.
- * V $(i+1)$ -ní iteraci cyklu nastane

$$b[i+1] \leftarrow b[i] + b[i-1] = fibonacci(i) + fibonacci(i-1) = fibonacci(i+1),$$

což je přesně podle rekurentní definice z Algoritmu 11.9. □

11.4 Techniky důkazu indukcí

- Doposud zde byla matematická indukce obvykle představována ve své přímočaré formě, kdy dokazované tvrzení ihned nabízelo celočíselný parametr, podle nějž bylo potřebné indukci vést. □
- Indukční krok pak prostě zpracoval přechod „ $n = i \rightsquigarrow n = i + 1$ “. □
- To však u dokazování správnosti algoritmů často neplatí a našim cílem zde je ukázat různé možné techniky, jak správně indukci na dokazování algoritmů aplikovat. □
- Uvidíme, jak si z nabízejících se parametrů správně vybrat a jak je případně kombinovat.

Technika fixace parametru

Příklad 11.11. *Mějme následující algoritmus. Co je jeho výsledkem výpočtu?*

Algoritmus .

```
function soucin(x,y):  
    if  $x \leq 0$  then  $t \leftarrow 0$ ;  
    else  $t \leftarrow \text{soucin}(x-1,y) + y$ ;  
return t. □
```

Sledováním průběhu rekurze v algoritmu zjistíme, že hloubka zanoření volání funkce `soucin` bude rovna nezáporné (horní celé) části x . Jelikož každé zanoření poté k výsledku přičte hodnotu y , odhadneme:

Věta. Pro každé $x, y \in \mathbb{N}$ Algoritmus 11.11 vrátí hodnotu $t = x \cdot y$.

Jaký je vhodný postup k důkazu tohoto tvrzení indukcí? Je snadno vidět, že na hodnotě vstupu y vlastně nijak podstatně nezáleží (lze y **fixovat**) a důležité je sledovat x . Tato úvaha nás dovede k následujícímu:

```
function soucin(x,y):  
    if x ≤ 0 then t ← 0;  
    else t ← soucin(x-1,y) + y;
```

Důkaz: Budiž $y \in \mathbb{N}$ libovolné ale pro další úvahy **pevné**.

Dokazujeme tady, že pro každý vstup $x := i \in \mathbb{N}$ volání funkce $\text{soucin}(x,y)$ navrátí hodnotu $i \cdot y$. \square

- V **bázi** pro $x = i = 0$ provedeme první větev podmínky, tj. $t \leftarrow 0 = 0 \cdot y$. \square
- **Indukční krok.** Nechť je tvrzení známo pro $x = i \in \mathbb{N}$ a uvažujme další vstup $x := i + 1 > 0$. V tom případě se vykonává druhá větev podmínky, čili $t \leftarrow \text{soucin}(x - 1, y) + y$. Všimněte si, že platí $x - 1 = i$. \square
Podle indukčního předpokladu již víme, že návratovou hodnotu volání funkce $\text{soucin}(i, y)$ je $i \cdot y$. \square Zbývá jen uvedené poznatky správně zřetězit

$$t = \text{soucin}(x - 1, y) + y = \text{soucin}(i, y) + y = i \cdot y + y = (i + 1)y = x \cdot y.$$

Důkaz matematickou indukcí je tímto zdárně ukončen. \square

Indukce k součtu parametrů

Příklad 11.12. Co je výsledkem následujícího rekurzivního výpočtu?

Algoritmus .

```
function kombinacni(m,n) :  
    res ← 1;  
    if m > 0 ∧ n > 0 then  
        res ← kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1);  
    fi  
return res . □
```

Výše uvedený vzorec (a ostatně i název funkce) naznačuje, že funkce má co společného s kombinačními čísly a *Pascalovým trojúhelníkem*

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b},$$

je však třeba správně „nastavit“ význam parametrů a, b, \dots □

Věta. Pro každé parametry $m, n \in \mathbb{N}$ je výsledkem výpočtu funkce `kombinacni(m,n)` hodnota $res = \binom{m+n}{m}$ (kombinační číslo) – počet všech m -prvkových podmnožin $(m+n)$ -prvkové množiny.

```

res ← 1;
if m > 0 ∧ n > 0 then
    res ← kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1);
fi

res =  $\binom{m+n}{m}$ 

```

Důkaz indukcí vzhledem k součtu parametrů $i = m + n$: □

- **Báze** $i = m + n = 0$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ znamená, že $m = n = 0$. Zde však s výhodou využijeme tzv. „rozšíření báze“ na všechny hraniční případy $m = 0$ nebo $n = 0$ zvlášť.

V obou rozšířených případech daná podmínka algoritmu není splněna, a proto výsledek výpočtu bude počáteční $res = 1$. Je toto platná odpověď? □

- * Kolik je prázdných podmnožin ($m = 0$) jakékoliv množiny? Jedna, \emptyset .
- * Kolik je m -prvkových podmnožin ($n = 0$) m -prvkové množiny? Zase jedna, ta množina samotná.

Tím je důkaz rozšířené báze indukce dokončen.

```

res ← 1;
if m > 0 ∧ n > 0 then
    res ← kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1);
fi

```

- **Indukční krok** přechází na součet $i + 1 = m + n$ pro $m, n > 0$.
Nyní je podmínka algoritmu splněna a vykonají se rekurentní volání

kombinacni(m-1,n) + kombinacni(m,n-1). □

Rekurentní volání se vztahují k výběru podmnožin nosné množiny, která má $m - 1 + n = m + n - 1 = i$ prvků, například $M = \{1, 2, \dots, i\}$. Výsledkem tedy je, podle indukčního předpokladu pro součet i , počet všech $(m - 1)$ -prvkových plus m -prvkových podmnožin množiny M . □

Kolik je m -prvkových podmnožin $(i + 1)$ -prvkové množiny $M' = M \cup \{i + 1\}$? Pokud ze všech těchto podmnožin odebereme prvek $i + 1$, dostaneme právě

* m -prvkové podmnožiny (z těch neobsahujících prvek $i + 1$)

plus

* $(m - 1)$ -prvkové podmnožiny (z těch původně obsahujících $i + 1$). □

A to je v součtu rovno $\text{kombinacni}(m-1,n) + \text{kombinacni}(m,n-1)$, jak jsme měli dokázat. □

Zesílení dokazovaného tvrzení

Příklad 11.13. Zjistěte, jaká je návratová hodnota volání následující funkce $\text{tajemne}(x, 1)$ v závislosti na celočíselné vstupní hodnotě x .

Algoritmus 11.14.

```
function tajemne(x,y):  
    if  $x \leq 0$  then  $t \leftarrow 0$ ;  
    else  $t \leftarrow \text{tajemne}(x-1, 2 \cdot y) + y$ ;  
return t. □
```

Zkusíme-li si výpočet simulovat pro $x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, postupně získáme pro $\text{tajemne}(x, 1)$ návratové hodnoty $0, 1, 3, 7, 15, \dots$. □ Na základě toho již není obtížné uhodnout, že návratová hodnota asi bude obecně určena vztahem $2^x - 1$.

Toto je však třeba dokázat! □

Jak záhy zjistíme, matematická indukce na naše tvrzení přímo „nezabírá“, ale mnohem lépe se nám povede s následujícím přirozeným zesílením dokazovaného tvrzení, které zobecňuje výsledek na proměnné hodnoty parametru y (a které také musíme uhodnout):

Algoritmus .

```
function tajemne(x,y):  
    if x ≤ 0 then t ← 0;  
    else t ← tajemne(x-1,2·y) + y;
```

Věta. Pro každá přirozená x, y volání funkce $\text{tajemne}(x, y)$ Algoritmu 11.14 vrátí hodnotu $(2^x - 1) \cdot y$. \square

Důkaz: Postupujeme indukcí podle $x := i \in \mathbb{N}$. \square

- V **bázi**, pro vstup $x = i = 0$ je navracena hodnota $0 = (2^0 - 1) \cdot y$. \square
- **Indukční krok.** Nechť je tvrzení známo pro $x = i \in \mathbb{N}$ a uvažujme další vstup $x := i + 1 > 0$. V tom případě se vykonává druhá větev podmínky a výsledek bude roven hodnotě $\text{tajemne}(x-1, 2y) + y = \text{tajemne}(i, 2y) + y$. \square Podle indukčního předpokladu již víme, že volání funkce $\text{tajemne}(i, 2y)$ navrátí $(2^i - 1) \cdot 2y$, a celkem tak platí: \square

$$\text{tajemne}(i, 2y) + y = (2^i - 1) \cdot 2y + y = 2^{i+1}y - 2y + y = (2^{i+1} - 1)y$$

Poslední výraz je roven požadovanému $(2^x - 1) \cdot y$. \square

11.5 Dodatek: Zajímavé algoritmy aritmetiky

Euklidův algoritmus

Algoritmus 11.15. Euklidův pro největšího společného dělitele.

```
input  p, q;  
while p>0 ∧ q>0 do  
    if p>q then p ← p-q;  
    else q ← q-p;  
done  
output p+q. □
```

Věta. Pro každé $p, q \in \mathbb{N}$ na vstupu algoritmus vrátí hodnotu největšího společného dělitele čísel p a q , nebo 0 pro $p = q = 0$. □

Důkaz provedeme indukcí podle součtu $i = p + q$ vstupních hodnot.

(Jak jsme psali, je to **přirozená volba** v situaci, kdy každý průchod cyklem algoritmu sníží jedno z p, q , avšak není jasné, které z nich.) □

- Báze indukce pro $i = p + q = 0$ je zřejmá; cyklus algoritmu neproběhne a výsledek ihned bude 0 .

```

while p>0 ∧ q>0 do
    if p>q then p ← p-q;
    else q ← q-p;
done

```

- Ve skutečnosti je zase výhodné uvažovat rozšířenou bázi, která zahrnuje i případy, kdy jen jedno z p, q je nulové (což je ukončovací podmínka cyklu).
Pak výsledek $p + q$ bude roven tomu nenulovému z obou sčítanců, což je v tomto případě zároveň jejich největší společný dělitel. □
- **Indukční krok.** Uvažme vstupy $p := h_p$ a $q := h_q$, přičemž $h_p + h_q = i + 1$ a $h_p > 0$ a $h_q > 0$ – tehdy dojde k prvnímu průchodu tělem cyklu. □
 - * Předp. $h_p > h_q$; poté po prvním průchodu tělem cyklu budou hodnoty $p = h_p - h_q$ a $q = h_q$, což znamená $p + q = h_p \leq h_p + h_q - 1 = i$.
 - * Podle indukčního předpokladu tudíž výsledkem algoritmu pro vstupy $p = h_p - h_q$ a $q = h_q$ bude největší společný dělitel $NSD(h_p - h_q, h_q)$. □
 - * Symetricky pro $h_p \leq h_q$ algoritmus vrátí $NSD(h_p, h_q - h_p)$.

Důkaz proto bude dokončen následujícím Lematem 11.16. □

Největší společný dělitel

Lema 11.16. $NSD(a, b) = NSD(a - b, b) = NSD(a, b - a)$.

Všimněte si, že dělitelnost je dobře definována i na záporných celých číslech. \square

Důkaz: Ověříme, že $c = NSD(a - b, b)$ je také největší společný dělitel čísel a a b (druhá část je pak symetrická). \square

- Jelikož číslo c dělí čísla $a - b$ a b , dělí i jejich součet $(a - b) + b = a$. Potom c je společným dělitelem a a b . \square
- Naopak nechť d nějaký společný dělitel čísel a a b . Pak d dělí také rozdíl $a - b$. Tedy d je společný dělitel čísel $a - b$ a b . Jelikož c je **největší** společný dělitel těchto dvou čísel, nutně d dělí c a závěr platí. \square

Modulární umocňování

Dále například umocňování na velmi vysoké exponenty je podkladem RSA šifry.

Algoritmus 11.17. Binární postup umocňování.

Pro daná čísla a, b vypočteme jejich celočíselnou mocninu (omezenou na zbytkové třídy modulo m pro prevenci přetečení rozsahu celých čísel v počítači), tj. hodnotu $a^b \bmod m$, následujícím postupem.

```
input a, b, m;  
res ← 1;  
while b > 0 do  
    if b mod 2 > 0 then res ← (res·a) mod m;  
    b ← ⌊b/2⌋; a ← (a·a) mod m;  
done  
output res. □
```

K důkazu správnosti použijeme indukci podle délky ℓ binárního zápisu čísla b .

Věta. Algoritmus 11.17 skončí a správně vypočte hodnotu $a^b \bmod m$.

```

res ← 1;
while b > 0 do
    if b mod 2 > 0 then res ← (res·a) mod m;
    b ← ⌊b/2⌋;  a ← (a·a) mod m;
done
output res.

```

Důkaz: Báze indukce je pro $\ell = 1$, kdy $b = 0$ nebo $b = 1$. Přitom pro $b = 0$ se cyklus vůbec nevykoná a výsledek je $res = 1$. Pro $b = 1$ se vykoná jen jedna iterace cyklu a výsledek je $res = a \pmod m$. \square

Nechť tvrzení platí pro všechny vstupy b délky $\ell = i \geq 1$ a uvažme vstup délky $\ell := i + 1$. Pak zřejmě $b \geq 2$ a vykonají se alespoň dvě iterace cyklu. \square

Po první iteraci budou hodnoty proměnných po řadě

$$a_1 = a^2, \quad b_1 = \lfloor b/2 \rfloor \quad \text{a} \quad res = r_1 = (a^{b \bmod 2}) \pmod m. \square$$

Tudíž délka binárního zápisu b_1 bude jen $\ell - 1 = i$ a podle indukčního předpokladu zbylé iterace algoritmu skončí s výsledkem

$$res = r_1 \cdot a_1^{b_1} \pmod m = (a^{b \bmod 2} \cdot a^{2\lfloor b/2 \rfloor}) \pmod m = a^b \pmod m. \quad \square$$

Dodatek II

Relativně rychlé odmocnění

Na závěr oddílu si ukážeme jeden netradiční krátký algoritmus a jeho analýzu a důkaz zde ponecháme otevřené. Dokážete popsat, na čem je algoritmus založen?

Algoritmus 11.18. Celočíslná odmocnina.

Pro dané přirozené číslo x vypočteme dolní celou část jeho odmocniny $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$:

```
input x;
p ← x;   res ← 0;
while p > 0 do
    while (res + p)2 ≤ x do res ← res + p;
    p ← ⌊p/2⌋;
done
output res.
```