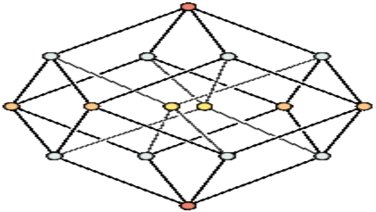
7 Ekvivalence, Uspořádané množiny

V této lekci dále pokračujeme probíráním binárních relací na množinách jako nástrojů vyjadřujících vztahy mezi objekty. Zaměřujeme se nyní především na relace „srovnávající“ objekty podle jejich vlastností – buď na shodnosti nebo uspořádání.



Stručný přehled lekce

* Relace ekvivalence, jím odpovídající rozklady množin.
* Uspořádané množiny a relevantní pojmy k uspořádání.
* Hasseovské diagramy uspořádaných množin.

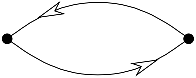
Vlastnosti binárních relací, zopakování

Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

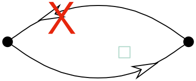
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;

- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;

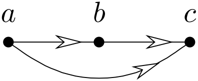
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;



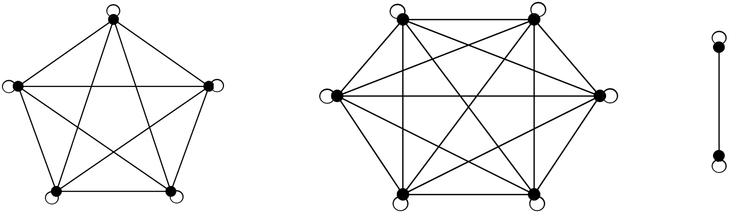
- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



7.1 Relace ekvivalence a rozklady

- Podle Definice 6.2 je relace $R \subseteq M \times M$ *ekvivalence* právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto tři vlastnosti tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalencí.

- Jak vypadá graf relace ekvivalence?



- Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“ (leží na stejné hromádce).

Značení. V případě relace ekvivalence se poměrně často lze setkat s označením jako $\sim$ či $\approx$ místo R. Místo $(x, y) \in R$ se pak píše $x \approx y$.

Další ukázkové binární relace

Příklad 7.1. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ a zkoumejme, zda se jedná o ekvivalence:*

- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů;
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku nebo stejnou barvu vlasů.

U kterého body se nejedná o relaci ekvivalence a proč?

Je to poslední případ, kdy není splněna tranzitivita! □

Tvrzení 7.2. *Nechť R, S jsou dvě relace ekvivalence na stejné množině M. Pak jejich průnik $R \cap S$ je opět relací ekvivalence.*

Příklad 7.3. *Nechť* $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je binární relace definovaná takto:* $(x, y) \in R$ *právě když* $|x - y|$ *je dělitelné třemi. V jakém smyslu jsou zde* x *a* y *„stejné“?* □

Platí $(x, y) \in R$ právě když x, y dávají stejný zbytek po dělení třemi. Je to opět relace ekvivalence. □ □

Příklad 7.4. *Buď* R *binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto:* $(x, y) \in R$ *právě když* x *i* y *sedí v první lavici.* □

Už na první pohled jde o relaci symetrickou a tranzitivní. Proč se v tomto případě nejedná o relaci ekvivalence? □
Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Definice 7.5. Rozklad množiny. Nechť M je množina.
Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \not\in \mathcal{N}$ (tj. každý prvek $\mathcal{N}$ je neprázdná podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A\in\mathcal{N}} A = M$.□

Prvkům $\mathcal{N}$ se také říká *třídy rozkladu*.

- Buď $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M.□
- Nechť $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$.
  Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ podle zbytkových tříd.□

Každý rozklad $\mathcal{N}$ na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M:

Věta 7.6. *Nechť M je množina a $\mathcal{N}$ rozklad na M. Nechť $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto*

$$(x,y) \in R_{\mathcal{N}} \text{ právě když existuje } A \in \mathcal{N} \text{ taková, že } x,y \in A.$$

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je ekvivalence na M. □

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní (Def. 6.2). □

- Reflexivita: Buď $x \in M$ libovolné. Jelikož $\mathcal{N}$ je rozklad na M, musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 7.5). Proto $(x,x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní. □
- Symetrie: Nechť $(x,y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x,y \in A$. To ale znamená, že také $(y,x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická. □
- Tranzitivita: Nechť $(x,y),(y,z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A,B \in \mathcal{N}$ takové, že $x,y \in A$ a $y,z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z Definice 7.5 platí $A = B$. Tedy $x,z \in A = B$, proto $(x,z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$.

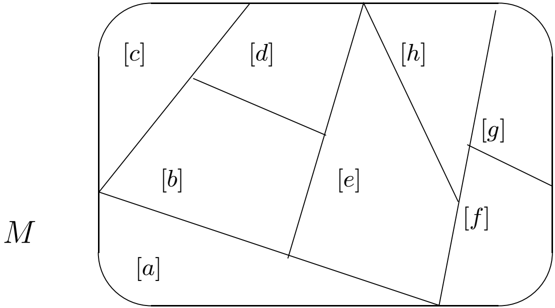
□

Každá ekvivalence R na M naopak jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M:

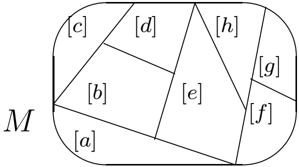
Věta 7.7. *Nechť M je množina a R ekvivalence na M. Pro každé $x \in M$ definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x,y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ je rozklad na M, který značíme M/R. □



Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky Definice 7.5.



- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$.□
- Nechť $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$. □

  Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x, z), (y, z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y, z) \in R$, platí $(z, y) \in R$. Jelikož $(x, z), (z, y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x, y) \in R$. Proto také $(y, x) \in R$ (opět ze symetrie R). □Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:

  * „$[x] \subseteq [y]$“: Nechť $v \in [x]$. Pak $(x, v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y, x) \in R$ (viz výše), tedy $(y, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$.□
  * „$[y] \subseteq [x]$“: Nechť $v \in [y]$. Pak $(y, v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x, y) \in R$ (viz výše), tedy $(x, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$.□
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. □

7.2 Uspořádané množiny

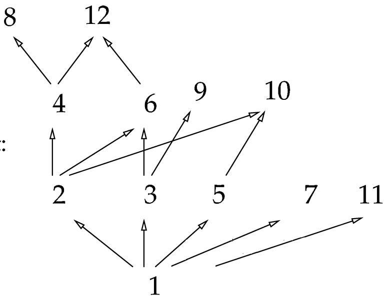
- Podle Definice 6.2 je relace $R \subseteq M \times M$ *(částečné) uspořádání* právě když R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Tyto tři vlastnosti tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je uspořádáním. □

- Neformálně řečeno: uspořádání je taková relace $R \subseteq M \times M$, kde $(x, y) \in R$ právě když x je v nějakém smyslu „menší nebo rovno“ než y. □

  Mohou ovšem existovat taková $x, y \in M$, kde neplatí $(x, y) \in R$ ani $(y, x) \in R$. (Pak říkáme, že x a y jsou *nesrovnatelné*.) □

- Jak názorně zobrazit (částečné) uspořádání? Zjednodušeně takto:

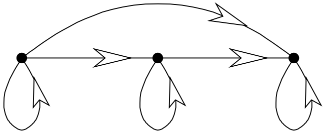
dělitelnost:

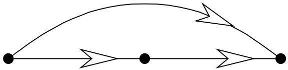


Značení. Pro větší přehlednost se relace uspořádání často značí symboly jako $\sqsubseteq$ či $\preceq$ místo prostého R. I my budeme psát třeba $x \preceq y$ místo $(x, y) \in R$.

Poznámka: Zajisté jste se již setkali s „neostrým“ uspořádáním čísel $\leq$ a „ostrým“ uspořádáním $<$. Všimněte si dobře, že námi definované uspořádání je vždy neostré.

Pokud byste naopak chtěli definovat ostré uspořádání, mělo by vlastnosti ireflexivní, antisymetrické a tranzitivní. (Příliš se však tato varianta nepoužívá.)

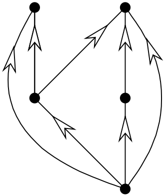


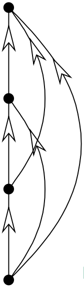


Nadále budeme pracovat pouze s neostrým uspořádáním, ale smyčky vyplývající z reflexivity a případně i šipky z tranzitivity budeme pro větší přehlednost v obrázcích vynechávat.

Uspořádaná množina

Definice 7.8. **Uspořádaná množina** je dvojice $(M, \preceq)$, kde M je množina a $\preceq$ je (částečné) uspořádání na M. □





□

Definice: Uspořádání $\preceq$ na M je *lineární* (nebo také *úplné*), pokud každé dva prvky M jsou v $\preceq$ srovnatelné.

Příklady uspořádaných množin

Příklad 7.9. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované následovně (jedná se úplně vždy o uspořádání?):*

- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když y má alespoň takovou výšku jako x.

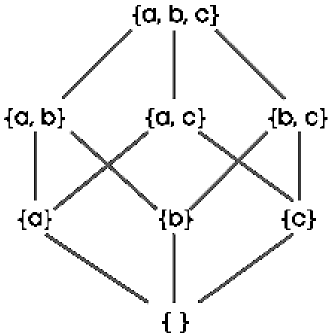
Všimněte si dobře možného problému – pokud by dva studenti měli přesně stejnou výšku, nebyla by splněna podmínka antisymetrie. Prakticky však můžeme uvažovat, že toto nenastane (matematicky bychom řekli, že pravděpodobnost výskytu dvou studentů přesně stejné výšky bez omezení přesnosti měření je nula) a bude se jednat o uspořádání. □

Příklad 7.10. *Nechť M je množina všech českých studentů 1. ročníku FI. Uvažme relaci $R \subseteq M \times M$ definovanou tak, že $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo. Je možné, aby R byla uspořádáním na M?*

Ano, za zákonného předpokladu jedinečnosti rodného čísla. Zajímavé, že? □

Příklad 7.11. *Další ukázky uspořádaných množin následují zde:*

- $(\mathbb{N}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, kde $\leq$ má „obvyklý“ význam.□
- $(\mathbb{N}, |\,)$, kde $a|b$ je relace dělitelnosti „a dělí b“ na přirozených číslech, je uspořádaná množina. Toto uspořádání není lineární.□
- Buď M množina. Pak $(2^M, \subseteq)$ je uspořádaná množina (říkáme *inkluzí*). Které dvojice jsou v uspořádání inkluzí nesrovnatelné?



□

Multikriteriální uspořádání

Co třeba znamená požadavek na „nejlepší počítač“? □

- I pokud se soustředíme jen na užitné / výkonové charakteristiky počítače, můžeme porovnávat nejen podle rychlosti procesoru, ale také třeba podle výkonu grafiky, velikosti paměti a disku, nebo i počtu nakouslých jablek. □
- Takže jak lze objekty podle více kritérií seřadit? □
- Pro numerická kritéria lze řadit podle jejich váženého průměru (či součtu).□
- Nebo uspořádat podle průniku seřazení jednotlivých kritérií (po složkách).

  Pokud P je lepší než Q, tak P v žádném kritériu nemůže zaostávat za Q. □
  Avšak výsledkem bude typicky existence několika „nejlepších“ objektů, které nebudeme umět vzájemně porovnat. □
- Nakonec slovníkovým uspořádáním: Kritéria seřadíme od nejdůležitějšího a první odlišná hodnota kritéria rozhoduje.

  Například nás v prvé řadě zajímá rychlost procesoru, poté velikost paměti a až nakonec výkon grafiky či velikost disku. . . (nejsme hráči her)

Formalizace multikriteriálního uspořádání

Formálně mějme několik kritérií označených indexovou množinou I. Pro $i \in I$ nechť hodnoty nabývané i-tým kritériem tvoří uspořádanou množinu $(A_i, \leq_i)$.

Definice 7.12. **Uspořádání podle více kritérií**.
Pro $I \subseteq \mathbb{N}$ mějme systém uspořádaných množin $(A_i, \leq_i)$ kde $i \in I$. Na množině $M := \bigtimes_{i \in I} A_i$ definujeme binární relace $\sqsubseteq$ a $\preceq$ takto; □

pro $\ell, m \in M$ kde $\ell = (\ell_i : i \in I)$ a $m = (m_i : i \in I)$ platí

- (*po složkách*)

  $\ell \sqsubseteq m$ právě když $\ell_i \leq_i m_i$ pro všechna $i \in I$,□

- (*lexikograficky*)

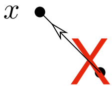
  $\ell \preceq m$ právě když $\ell = m$, nebo
  existuje $j \in I$ tak, že $\ell_j \lneq_j m_j$ a
  pro všechna $i \in I$, $i < j$ platí $\ell_i = m_i$.□

Tvrzení 7.13. *Relace $\sqsubseteq$ a $\preceq$ jsou uspořádání. Navíc, pokud všechny $(A_i, \leq_i)$ jsou lineárně uspořádané, tak lexikografické $(M, \preceq)$ je taktéž lineární.*

7.3 Pojmy uspořádaných množin

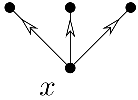
Definice 7.14. Nechť $(M, \preceq)$ je uspořádaná množina.
Prvek $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ je

- *minimální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že z $y \preceq x$ vyplývá $x \preceq y$, čili podle antisymetrie pro každé $y \preceq x$ platí $y = x$.



- *maximální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že z $x \preceq y$ vyplývá $y \preceq x$, čili podle antisymetrie pro každé $y \succeq x$ platí $y = x$.
(Tj. x je maximální, právě když neexistuje žádný prvek ostře větší než x, a x je minimální, právě když neexistuje žádný prvek ostře menší než x.)

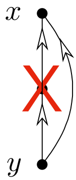
- *nejmenší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $x \preceq y$.



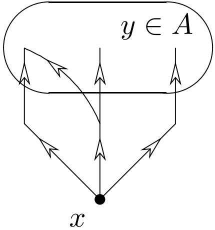
- *největší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $y \preceq x$.

Prvek $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$

- *pokrývá* $y \in M$ právě když $x \neq y$, $y \preceq x$ a neexistuje žádné $z \in M$ takové, že $x \neq z \neq y$ a $y \preceq z \preceq x$.

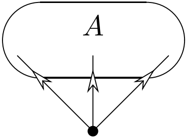


- je *dolní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $x \preceq y$ pro každé $y \in A$.



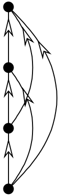
- je *horní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $y \preceq x$ pro každé $y \in A$.

- $x \in M$ je *infimum* množiny $A \subseteq M$ právě když x je největší dolní závora (mez) množiny A.



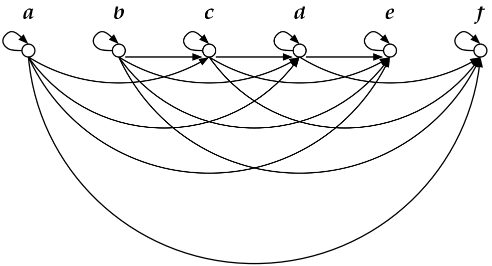
- $x \in M$ je *supremum* množiny $A \subseteq M$, právě když x je nejmenší horní závora (mez) množiny A. □

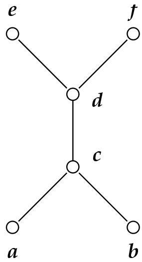
- $A \subseteq M$ je *řetězec* v uspořádání $\preceq$ právě když $(A, \preceq)$ je *lineárně* uspořádaná množina.



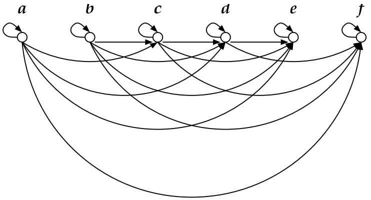
Hasseovské diagramy

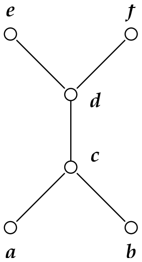
Motivací zavedení tzv. Hasseovských diagramů uspořádaných množin jsou přehlednější „obrázky“ než u grafů relací. Například si srovnejte následující:





Zjednodušení a konvence přinesené následující definicí jsme ostatně měli možnost vidět už na některých z předchozích ilustračních obrázků uspořádání.

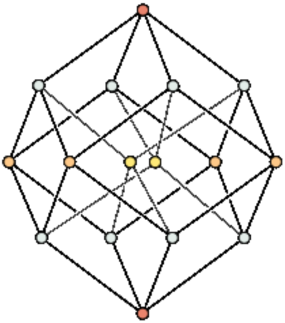




Definice: *Hasseovský diagram* konečné uspořádané množiny $(M, \preceq)$ je jeho (jednoznačné) grafické znázornění získané takto:

- Do první „horizontální vrstvy" zakreslíme body odpovídající minimálním prvkům $(M, \preceq)$. (Tj. které nepokrývají nic.) $\square$
- Máme-li již zakreslenu vrstvu i, pak do vrstvy $i + 1$ (která je „nad" vrstvou i) zakreslíme všechny nezakreslené prvky, které pokrývají pouze prvky vrstev $\leq i$. Pokud prvek x vrstvy $i + 1$ pokrývá prvek y vrstvy $\leq i$, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. „čárou").

Příklad 7.16. *Relaci inkluze na čtyřprvkové množině* $\{a, b, c, d\}$ *zakreslíme Hasseovským diagramem takto:*



□

Jak vidíme, v Hasseovském diagramu „vynecháváme" ty hrany relace $\preceq$, které vyplývají z reflexivity či tranzitivity. To celý obrázek výrazně zpřehlední, a přitom nedochází ke ztrátě informace.

Lze vynechat i šipky na hranách, neboť dle definice všechny míří „vzhůru".

Také pojem „*vrstvy*" v definici je jen velmi neformální, důležité je, že větší (pokrývající) prvky jsou nad menšími (pokrývanými).

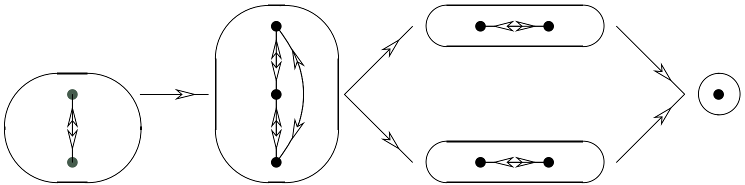
7.4 Relace předuspořádání

Co když studenty na zkoušce „uspořádáme“ podle výsledné známky A–F?

Bude to vždy uspořádání? Samozřejmě ne, obvykle více než jeden student bude mít třeba známku E, což zjevně porušuje antisymetrii.

Definice: Relace $R \subseteq M \times M$ je *předuspořádání* (také *kvaziuspořádání*, nebo *polouspořádání*) právě když R je reflexivní a tranzitivní.

Rozdíl mezi uspořádáním a předuspořádáním je (jen neformálně řečeno!) v tom, že u předuspořádání srovnáváme prvky podle kritéria, které není pro prvek jedinečné. V předuspořádání takto mohou vznikat „balíky“ (třídy) se stejnou hodnotou kritéria, což schematicky ilustrujeme na následujícím obrázku.



Z předuspořádání na uspořádání

Věta 7.17. *Je-li* $\sqsubseteq$ *předuspořádání na* M, *můžeme definovat relaci* $\sim$ *na* M *předpisem*

$$x \sim y \quad \textit{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x\,.$$

Pak $\sim$ *je ekvivalence na* M, *která se nazývá jádro předuspořádání* $\sqsubseteq$. □

Na rozkladu $M/\sim$ *pak lze zavést relaci* $\preceq$ *definovanou takto*

$$[x] \preceq [y] \quad \textit{právě když } x \sqsubseteq y\,.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ *je uspořádaná množina indukovaná* $\sqsubseteq$. □

Pro ukázku si vezměme relaci dělitelnosti na $\mathbb{Z}$. Pak třeba $-2 \sim 2$.
Jádrem zde jsou dvojice čísel stejné absolutní hodnoty.

Věta 7.17. *Je-li* $\sqsubseteq$ *předuspořádání na* M, *můžeme definovat relaci* $\sim$ *na* M *předpisem*

$$x \sim y \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak $\sim$ *je ekvivalence na* M, *která se nazývá jádro předuspořádání* $\sqsubseteq$.

Na rozkladu $M/\sim$ *pak lze zavést relaci* $\preceq$ *definovanou takto*

$$[x] \preceq [y] \quad \text{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ *je uspořádaná množina.*

Důkaz (náznak): Tranzitivita a reflexivita relace $\sim$ vyplývá z tranzitivity a reflexivity relace $\sqsubseteq$. Symetrie $\sim$ pak je přímým důsledkem její definice. Tudíž $\sim$ skutečně je relací ekvivalence a $M/\sim$ je platný rozklad.

Tranzitivita a reflexivita relace $\preceq$ se opět dědí z relace $\sqsubseteq$. Její antisymetrie vyplývá následující úvahou: Pokud $[x] \preceq [y]$ a $[y] \preceq [x]$, pak podle naší definice $x \sqsubseteq y$ a $y \sqsubseteq x$, neboli $x \sim y$ a $[x] = [y]$ podle definice tříd rozkladu.

Pozor, nejdůležitější částí této větve důkazu je však ještě zdůvodnění, že naše podaná definice vztahu $[x] \preceq [y]$ je korektní, což znamená, že její platnost nezávisí na konkrétní volbě reprezentantů x z $[x]$ a y z $[y]$. $\Box$