

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [2 body] Mějme následující jazyk:

$$L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid \#_a(w) = 2\#_b(w) \text{ a } \#_a(w) < \#_c(w)\}$$

Rozhodněte, zda je tento jazyk bezkontextový, a své rozhodnutí dokažte. (Pro důkaz toho, že je jazyk bezkontextový, stačí sestavit příslušnou bezkontextovou gramatiku nebo zásobníkový automat.)

Řešení: Jazyk L není bezkontextový. Dokážeme to pomocí lemmatu o vkládání (Pumping Lemma) pro bezkontextové jazyky.

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Zvolíme slovo $z = a^{2n}b^n c^{2n+1}$. Zřejmě platí $z \in L$ a $|z| > n$. Nyní prozkoumáme všechna rozdělení $z = uvwxy$ taková, že $|vwx| \leq n$ a $vx \neq \varepsilon$. Každé takové rozdělení je jednoho z těchto druhů:

- Část v nebo x obsahuje alespoň jedno a . Potom zřejmě ani v ani x neobsahují žádné c . Zvolíme $i = 2$, pak zřejmě platí $\#_a(uv^2wx^2y) \geq \#_c(uv^2wx^2y)$, a tedy $uv^2wx^2y \notin L$. (Pumpováním se zvětší počet a , ale počet c se nezmění.)
- Části v ani x neobsahují žádné a , ale alespoň jedna z nich obsahuje alespoň jedno b . Zvolíme $i = 0$, pak zřejmě platí $\#_a(uv^0wx^0y) > 2\#_b(uv^0wx^0y)$, a tedy $uv^0wx^0y \notin L$. (Pumpováním se zmenší počet b , ale počet a se nezmění.)
- Části v ani x neobsahují žádná a ani žádná b , musí tedy obsahovat pouze symboly c . Zvolíme $i = 0$, pak zřejmě platí $\#_a(uv^0wx^0y) \geq \#_c(uv^0wx^0y)$, a tedy $uv^0wx^0y \notin L$. (Pumpováním se zmenší počet c , ale počet a se nezmění.)

Je jasné, že tyto tři body pokrývají všechny možnosti, které mohou nastat. Ukázali jsme tedy, že pro každé rozdělení $z = uvwxy$ je možno najít i takové, že $uv^iwx^iy \notin L$. Podle lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky tedy L není bezkontextový.