

## FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I

### Řešení sady problémů 4.

1. Nechť  $A = (K, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$  je konečný automat akceptující jazyk  $L$ .  
Zkonstruujeme nejdříve nedeterministický konečný automat  $A'$  akceptující jazyk  $\{a\}\{a, b\}^*\{a\}$ .

$A' = (K', \{a, b\}, \delta', 1, F')$ , přičemž:

$K' = \{1, 2, 3\}$ ;

$F' = \{3\}$ ;

$\delta' : \delta'(1, a) = \{2\}$

$\delta'(1, b) = \emptyset$

$\delta'(2, a) = \{2, 3\}$

$\delta'(2, b) = \{2\}$

$\delta'(3, a) = \delta'(3, b) = \emptyset$

Automat  $\bar{A}$  akceptující jazyk  $\bar{L} = L \cap \{a\}\{a, b\}^*\{a\}$  je kartézským součinem automatů  $A$  a  $A'$ .

$\bar{A} = (\bar{K}, \{a, b\}, \bar{\delta}, \bar{q}_0, \bar{F})$ , přičemž:

$\bar{K} = K \times K'$ ;

$\bar{q}_0 = (q_0, 1)$ ;

$\bar{F} = F \times F'$ ;

$\bar{\delta} : \bar{\delta}((p, s), x) = \{(r, t) \mid r \in \delta(p, x); t \in \delta'(s, x)\}$

pro všechna  $p \in K$ ;  $s \in K'$ ;  $x \in \{a, b\}$ .

2. Nechť  $G = (N, \Sigma, P, S)$  je regulární gramatika, t.j. všechna její pravidla jsou tvaru  $A \rightarrow xB$  anebo  $A \rightarrow x$  ( $A, B \in N$ ,  $x \in \Sigma$ ). Proto odvození slova  $w = x_2x_1$  v gramatice  $G$  je tvaru  $S \Rightarrow^* x_2X \Rightarrow^* x_2x_1$ . Vytvoříme gramatiku  $G'$ , která nejprve vygeneruje část  $x_1$ , a pak část  $x_2$ .

$G' = (N', \Sigma, P', S')$ , přičemž množina neterminálů  $N'$  obsahuje symboly

$N' = \{A_{i,Y} \mid A, Y \in N; i = 1, 2\} \cup \{S'\}$ ,

( $S'$  je nový počáteční neterminál; neterminál  $A_{i,Y}$  značí, že odvozování začalo neterminálem  $Y$  a odvozuje se slovo  $x_i$ ).

Množina pravidel  $P' = P_0 \cup P_1 \cup P_2$ , kde

$P_0 = \{S' \rightarrow Y_{1,Y} \mid Y \in N\}$

(začínáme simulovat odvození slova  $x_1$  od neterminálu  $Y$ )

$P_1 = \{A_{1,Y} \rightarrow aB_{1,Y} \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{A_{1,Y} \rightarrow aS_{2,Y} \mid A \rightarrow a \in P\}$

(simulace odvození  $X \Rightarrow^* x_1$ , resp. přechod na simulaci  $S \Rightarrow^* x_2X$ .)

$P_2 = \{A_{2,Y} \rightarrow aB_{2,Y} \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{A_{2,Y} \rightarrow a \mid A \rightarrow aY \in P\}$

(simulace odvození  $S \Rightarrow^* x_2X$ , resp. její ukončení, když je skutečně možné odvodit v  $G$  větu  $x_2Y$  a  $Y$  je neterminál, z kterého bylo generováno  $x_1$ .)

3. Nejmenší třída jazyků, obsahující všechny konečné jazyky a uzavřená vzhledem k operacím sjednocení, průniku a komplement ( v dalším ji budeme označovat  $\mathcal{T}$ ) je vlastní podmnožinou množiny regulárních jazyků  $\mathcal{R}$ .

Inkluze  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$  je důsledkem uzávěrových vlastností třídy  $\mathcal{R}$  (konkrétně: každý konečný jazyk je regulární a třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operacím sjednocení, průniku a komplementu). Existence regulárního jazyka nepatřícího do třídy  $\mathcal{T}$  je důsledkem následujícího tvrzení:

*T: Necht'  $L \in \mathcal{T}$ ,  $L \subseteq \Sigma^*$ . Pak buď jazyk  $L$  je konečný, anebo komplement jazyka  $L$ ,  $L^c = \Sigma^* - L$ , je konečný.*

Nyní stačí uvážit jazyk  $\{aa\}^*$ . Jde o nekonečný regulární jazyk, kterého komplement  $\{a\}\{aa\}^*$  je taky nekonečný, a podle předcházejícího tvrzení  $T$  nepatří do třídy  $\mathcal{T}$ .

Dokážeme platnost tvrzení  $T$ . Při důkazu vyjdeme z faktu, že každý jazyk  $L$  třídy  $\mathcal{T}$  vznikne konečným počtem operací  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $^c$  z konečných jazyků. Definujeme hloubku jazyka  $L$ ,  $hl(L)$ , jako počet operací potřebných k vytvoření jazyka  $L$  takto:

$$hl(L) = \begin{cases} 0 & \text{když } L \text{ je konečný} \\ hl(L_1) + hl(L_2) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1 \cup L_2; L_1, L_2 \in \mathcal{T} \\ hl(L_1) + hl(L_2) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1 \cap L_2; L_1, L_2 \in \mathcal{T} \\ hl(L_1) + 1 & \text{když } L \text{ je nekonečný a } L = L_1^c; L_1 \in \mathcal{T} \end{cases}$$

Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k hloubce jazyka  $L$ .

1° Necht'  $L \in \mathcal{T}$  a  $hl(L) = 0$ . Pak jazyk  $L$  je konečný a tvrzení platí.

2° Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny jazyky hloubky menší než  $n$ ;  $n > 0$ . Dokážeme jej pro jazyky hloubky  $n$ . Předpokládejme proto, že  $L \in \mathcal{T}$  a  $hl(L) = n$ . Pak  $L$  je nekonečný a platí jedna z následujících možností:

- $L = L_1 \cup L_2$ , přičemž  $hl(L_1) < n$ ,  $hl(L_2) < n$  a nutně alespoň jeden z jazyků  $L_1$ ,  $L_2$  je nekonečný. Podle indukčního předpokladu je buď  $L_1^c$  nebo  $L_2^c$  konečný. Ale  $L^c = (L_1 \cup L_2)^c = L_1^c \cap L_2^c$ , a proto komplement jazyka  $L$  je konečný.
- $L = L_1 \cap L_2$ , přičemž  $hl(L_1) < n$ ,  $hl(L_2) < n$  a nutně oba jazyky  $L_1, L_2$  jsou nekonečné. Pak ale podle indukčního předpokladu jejich komplementy jsou konečné. Ale  $L^c = (L_1 \cap L_2)^c = L_1^c \cup L_2^c$ , a proto jazyk  $L$  je konečný.
- $L = L_1^c$ , přičemž  $hl(L_1) < n$  a  $L_1^c$  je nekonečný. Pak ale podle indukčního předpokladu je  $L_1$  konečný, a tedy i komplement jazyka  $L$  je konečný.