



FAKULTA
INFORMATIKY

Masarykova univerzita

IV120 Spojité a hybridní systémy

Definice dynamického systému

Spojité dynamické systémy

David Šafránek, Jiří Barnat, Jana Dražanová

Dynamický systém

- veličiny dynamického systému jsou funkcí času (tzv. **signály**)
- čas je reprezentován množinou časových okamžiků T (např. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$)
- v daném okamžiku $t \in T$:
 - na systém působí vstupní veličina (signál) $u(t)$
 - výstupem je výstupní veličina (signál) $y(t)$
- vstupní i výstupní veličina jsou obecně vektorové

$$u(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T$$

$$y(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T$$

Dynamický systém

- přípustné hodnoty vstupních veličin tvoří množinu U – typicky bývá (z fyzikálních důvodů) ohraničená, uvažuje se jako vektorový prostor
- **vstupní signál** je definován jako funkce $u(t) : T \rightarrow U$
- matematické a fyzikální požadavky kladené na systém mohou omezit volbu vstupních signálů, proto se zavádí třída přípustných vstupů $\mathcal{U} = \{u(t) : T \rightarrow U\}$
- analogicky je definována množina přípustných hodnot výstupních veličin Y (vektorový prostor) a třída přípustných výstupních signálů $\mathcal{Y} = \{y(t) : T \rightarrow Y\}$

Dynamický systém

- paměťová vlastnost dynamického systému: hodnota $y(t)$ nezávisí pouze na aktuální hodnotě $u(t)$, ale také na předcházejícím průběhu vstupní veličiny
- k oddělení minulého od současného zavádíme klíčový pojem **stav systému**
- stav systému v čase $t \in T$ je určen vektorem **vnitřních (stavových) veličin** $x(t)$

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$$

- znalost výchozího stavu $x(t_0)$ v čase t_0 a znalost vstupu $u(t)$ na intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$ jednoznačně určuje výstup $y(t)$ na tomto časovém intervalu

Dynamický systém

Definice

Dynamický systém

$$\mathcal{S} \equiv (T, X, U, \mathcal{U}, Y, \mathcal{Y}, \varphi, g)$$

- T je uspořádaná množina časových okamžiků splňující vlastnosti pologrupy,
- X je množina stavů (množina vektorů reprezentujících hodnoty vnitřních veličin),
- U (resp. Y) je množina vektorů okamžitých hodnot vstupních (resp. výstupních) veličin,
- \mathcal{U} je třída přípustných vstupních signálů splňující:
 1. $\mathcal{U} \neq \emptyset$
 2. \mathcal{U} je uzavřena na sjednocení
- \mathcal{Y} je třída přípustných výstupních signálů

Dynamický systém

Definice

- φ je **přechodová funkce** tvořící stavy $x(t)$:

$$x(t) \equiv \varphi(t, \tau, x(\tau), u)$$

Význam: Systém je ve stavu $x(t)$ v čase $t \in T$, pokud v čase $\tau \in T$ byl ve stavu $x(\tau) \in X$ a jestliže vstupní signál u působil na intervalu $\langle \tau, t \rangle$.

- φ splňuje následující vlastnosti:
 1. orientace času: $\varphi(t, \tau, x, u)$ je definována pro vš. $t \geq \tau$ (nemusí být def. pro $t < \tau$)
 2. identita: $\forall t \in T, x \in X, u \in U. \varphi(t, t, x(t), u) = x(t)$
 3. $\forall t_1 \leq t_2 \leq t_3, x \in X, u \in \mathcal{U}. \varphi(t_3, t_1, x, u) = \varphi(t_3, t_2, \varphi(t_2, t_1, x, u), u)$
 4. kauzalita: je-li $u, \bar{u} \in \mathcal{U}$ a $u(t) = \bar{u}(t)$ na intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$, pak

$$\varphi(t_2, t_1, x, u) = \varphi(t_2, t_1, x, \bar{u})$$

- g je **výstupní zobrazení** splňující $y(t) = g(x(t), u(t), t)$.

Dynamický systém

Definice

- systém je **ryze dynamický** pokud platí:

$$y(t) = g(x(t), t)$$

- **událost systému** je dvojice $(t, x(t))$ pro $t \in T, x \in X$
- **událost okolí** je dvojice $(t, u(t))$ pro $t \in T, u \in U$
- pro **neřízený (volný) systém** platí $\mathcal{U} = \{0\}$
- n nazýváme **dimenzí (řádem) systému** \mathcal{S} , zn. $\dim(\mathcal{S}) = n$, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$, t.ž. X je množina vektorů dimenze n , pro lib. $t \in T, x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)] \in X$
- systém nazýváme **spojitý (resp. diskrétní)**, pokud T je spojitá (resp. diskrétní) množina
- systém je **konečněstavový** pokud X je konečná množina

Dynamický systém

Reverzibilnost

- dynamický systém \mathcal{S} je **reverzibilní**, pokud $\varphi(t, \tau, x, u)$ definována pro vš. $t, \tau \in T$
- tedy zejména známe-li $\varphi(t, \tau, x, u)$, pak známe také $\varphi(\tau, t, x, u)$
- systémy jejichž přechodová funkce nezávisí na čase jsou typicky reverzibilní
 - např. systém logistického růstu, kinetika enzymů, výrobní linka, kyvadlo (obrácení znaménka vývoje, směru přechodů)
 - reverzibilitu lze pozorovat i u skákajícího míčku, termostatu (navíc nutno invertovat význam diskrétních událostí) ...
- upozornění – pojem reverzibility je používán v jiném kontextu s jiným významem (např. reverzibilní Petriho síť)

Dynamický systém

Stacionárnost

- dynamický systém \mathcal{S} je **stacionární (t-invariantní)**, pokud platí:
 - T tvoří aditivní grupu (uzavřenost na sčítání)
 - \mathcal{U} je uzavřena vůči posunutí v čase $z^\nu : u \rightarrow \bar{u}$:

$$\forall t, \nu \in T. \bar{u}(t) = u(t + \nu) = z^\nu(u(t))$$

- platí:

$$\varphi(t, \tau, x(\tau), u) = \varphi(t + \nu, \tau + \nu, x(\tau + \nu), z^\nu(u))$$

- aktivita stacionárního systému nezávisí na výchozím okamžiku
 - nerozlišíme mezi lib. dvěma různými pozorováními systému
 - např. konstantní zesilovač signálu, kyvadlo v klidové poloze, ustálený logistický růst
 - výrobní linka je příkladem nestacionárního systému
 - většina přírodních systémů není stacionární, ale může se dostat do tzv. stacionární fáze

Dynamický systém

Linearita

- systém je **lineární** pokud
 - $X, U, \mathcal{U}, Y, \mathcal{Y}$ jsou vektorové prostory
 - $\varphi(t, \tau, \cdot, \cdot) : X \times U \rightarrow X$ je lineární zobrazení pro vš. $t, \tau \in T$
 - $g(\cdot, \cdot, t) : X \times U \rightarrow Y$ je lineární zobrazení pro vš. $t \in T$
- systém je **nelineární** pokud je lineárnost alespoň jednoho zobrazení z přech. definice porušena

Dynamický systém

Hladkost

- dynamický systém \mathcal{S} je **hladký**, pokud platí:
 - $T = \mathbb{R}$
 - zobrazení $(\tau, x, u) \rightarrow \varphi(\cdot, \tau, x, u)$ je spojité zobrazení mapující prvky $T \times X \times \mathcal{U}$ na prostor spojitých funkcí $T \rightarrow X$
- vývoj stavu (aktivita) je spojitou funkcí času pro libovolný vstupní signál
- hladký systém lze popsat diferenciální rovnicí (někdy se hovoří o diferenciálních dynamických systémech)
- srovnej se skákajícím míčkem

Dynamický systém

Tvořící funkce

- pro hladké systémy definujeme **tvořící funkci** f :

$$\varphi(t + \Delta t, t, x, u) = x(t + \Delta t) = x(t) + f(x, u, t)\Delta t + \epsilon(\Delta t)$$

kde

- Δt je malý časový okamžik
 - změna stavu za Δt je lineární funkcí Δt
 - $\epsilon(\Delta t)$ je chyba druhého řádu (z Taylorova rozvoje)
- vyjádříme změnu stavu:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f(x, u, t) + \frac{\epsilon(\Delta t)}{\Delta t}$$

- pro $\Delta t \rightarrow 0$ dostáváme stavovou rovnici

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t)$$

Dynamický systém

Autonomní tvořící funkce

- pro stacionární systém platí:

$$\varphi(t + \Delta t, t, x(t), u) = \varphi(t + \Delta t + \nu, t + \nu, x(t + \nu), u)$$

- pokud $x(t) = x(t + \nu)$ potom:

$$f(x(t), u, t) = f(x(t + \nu), u, t + \nu)$$

Tvořící funkce je tedy nezávislá na čase, hovoříme o **autonomní tvořící funkci**.

Zkráceně píšeme $f(x, u)$.

Dynamický systém

Operátor toku

- tvořící funkce definuje rychlost toku (změnu stavu) pro každou vnitřní veličinu ve vektoru x
- lze definovat **operátor toku** Φ_t jako zobrazení přiřazující výchozímu stavu $x(0)$ hodnotu v čase t ($x(t)$):

$$x(t) = \Phi_t(x(0))$$

- z definice Φ a vlastností dynamického systému plyne:
 - $\Phi_{s+t}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$
 - $\Phi_t(\Phi_{-t}(x)) = \Phi_0(x) = x$
 - $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$
- inverzní operátor toku definuje stav systému v minulosti

Dynamický systém

Stavové rovnice systému

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

$$y(t) = g(x, u, t)$$

- u ... řídicí vektor,
- x ... stavový vektor,
- y ... výstupní vektor
- pokud je f, g nelineární funkce, hovoříme o nelineárním spojitém dynamickém systému

Dynamický systém

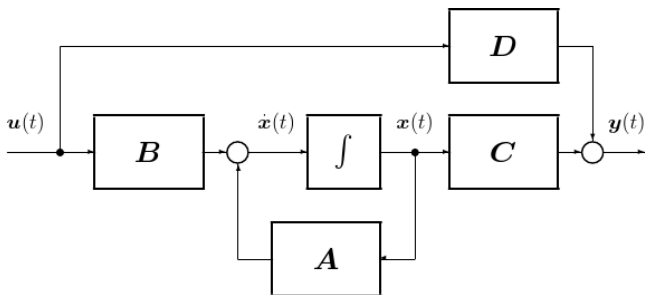
Stavové rovnice lineárního systému

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

- $A(t)$... matice systému (rozměr $n \times n$)
- $B(t)$... matice řízení (rozměr $m \times m$)
- $C(t), D(t)$... výstupní matice (rozměry $m \times n$ a $m \times r$)
- pokud je systém stacionární, jsou matice A, B, C, D nezávislé na čase
- pro striktně ryzí systém je matice D nulová

Dynamický systém

Blokové schéma



Dynamický systém

Příklady - exponenciální růst

- $T = \mathbb{R}_0^+$
- $\mathcal{U} = \{0\}$
- $X = Y = \mathbb{R}_0^+$
- $y(t) = x(t)$ (tím je určeno výstupní zobrazení g)
- $\dot{x}(t) = f(x, u, t) = \alpha x(t)$
- systém je autonomní a neřízený, lze tedy psát $f(x) = \alpha x$
- systém je zjevně lineární a striktně ryzí
- řešení: $x(t) = ce^{\alpha t}$ pro počáteční podmínku $x(0) = c$

Dynamický systém

Příklady – exponenciální růst

- maticový zápis:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

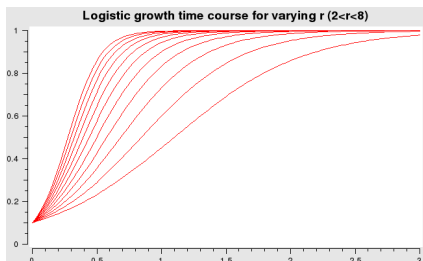
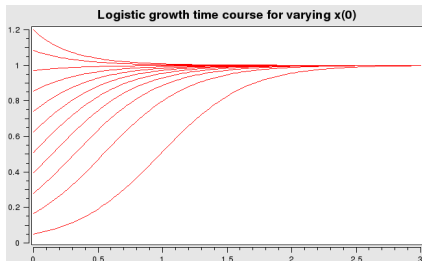
$$y(t) = Cx(t)$$

- $A = (\alpha)$
- $B = D = 0$
- $C = E$

Dynamický systém

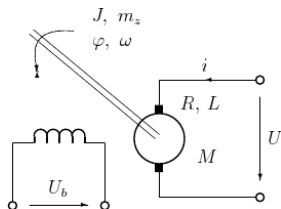
Příklady - logistický růst

- $T = \mathbb{R}_0^+$, $\mathcal{U} = \{0\}$, $X = Y = \mathbb{R}_0^+$
- $y(t) = x(t)$ (tím je určeno výstupní zobrazení g)
- $\dot{x}(t) = f(x, u, t) = rx(t)(1 - x(t))$
- systém je autonomní a neřízený, lze tedy psát $f(x) = rx(1 - x) = rx - rx^2$
- systém je zjevně nelineární a striktně ryzí
- řešení: $x(t) = \frac{c}{c + (1-c)e^{-rt}}$ pro poč. podmínku $x(0) = c$



Dynamický systém

Příklady – stejnosměrný motor



- dynamika popsána soustavou rovnic:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + k\omega$$

$$ki = J \frac{d\omega}{dt} + m_z$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

- $u(t)$... napětí na kotvě motoru
- $i(t)$... proud kotvy
- $\omega(t)$... úhlová rychlost hřídele
- $\varphi(t)$... poloha hřídele
- $m_z(t)$... zatěžovací moment hřídele
- k, J ... momentová konst., moment setrvačnosti hřídele
- R, L ... odpor a indukčnost kotvy

Dynamický systém

Příklady – stejnosměrný motor

- rovnice lze transformovat do stavového tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{k}{L}\omega + \frac{1}{L}u \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k}{J}i - \frac{1}{J}m_z \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega\end{aligned}$$

- stavové veličiny: $i(t)$, $\omega(t)$, $\varphi(t)$
- vstupní (řídící) veličiny: $u(t)$, $m_z(t)$
- výstupní veličina: $y(t) = \varphi(t)$

Dynamický systém

Příklady – stejnosměrný motor

Maticový zápis:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} & 0 \\ \frac{k}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hladké autonomní dynamické systémy

Základní vlastnosti

Funkce $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, je nazývána *Lipschitz-spojita* právě když existuje $\kappa > 0$ t.ž. pro všechna $x, y \in D$ platí:

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa|x - y|$$

Picard-Lindelöva věta

Nechť $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je Lipschitz-spojita a necht' $x_0 \in D$. Potom existuje $\epsilon > 0$ t.ž. iniciální problém

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

má právě jedno řešení $x(t)$ pro všechna $0 \leq t \leq \epsilon$.

Hladké automnní dynamické systémy

Základní vlastnosti

- libovolná dvě řešení pro libovolné dva různé iniciální problémy mají prázdný průnik
- výsledek lze přímo zobecnit na systémy rovnic
- zejména každá funkce, která je spojitá a v každém bodě existuje její derivace, je Lipschitz-spojité
- tedy hladký dynamický systém má vždy Lipschitz-spojitou tvořící funkci

Hladké autonomní dynamické systémy

Vícedimenzionální systémy

- dimenze systému n , uvažujeme stavový prostor $X = \mathbb{R}_0^{+n}$
- stav je vektor $x(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \rangle^T \in \mathcal{X}$
- $f(x(t)) = \langle f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_n(x(t)) \rangle^T$
- $\forall i. f_i(x(t))$ spojitá a diferencovatelná na X
- soustava:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

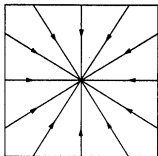
Hladké autonomní dynamické systémy

Fázový portrét

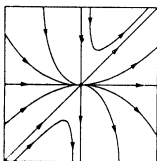
- **fázový portrét** je dán pro danou množinu inerciálních podmínek soustavou parametrických křivek (trajektorií)
- každý bod fázového prostoru náleží právě jedné trajektorii
- trajektorie mají prázdný průnik

Hladké autonomní dynamické systémy

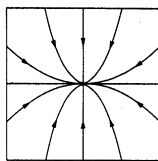
Fázový portrét



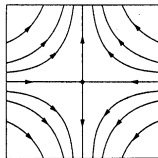
a) $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_2$



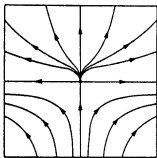
b) $\dot{x}_1 = x_1^2, \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2)$



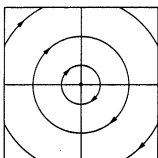
c) $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -2x_2$



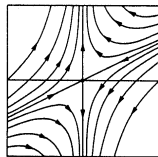
d) $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = x_2$



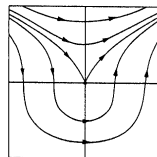
e) $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2^2$



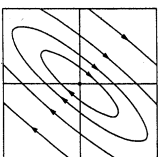
f) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1$



g) $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$



h) $\dot{x}_1 = x_2^2, \dot{x}_2 = x_1$



i) $\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2,$
 $\dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2.$