IV120 Spojité a hybridní systémy

Hybridní systémy

David Šafránek
Jiří Barnat
Jana Fabriková

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

EVROPSKÁ UNIE

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Studijní materiály a zdroje

Převzato z

- J. Lygeros: Lecture Notes on Hybrid Systems

On-line materiály

- `http://www.stanford.edu/class/aa278a/`
- `http://web.mae.cornell.edu/hadaskg/courses/mae6740.html`
- `http://vimeo.com/22384801`
- ...

Hybridní Systémy

- Systémy v nichž se kombinuje více druhů dynamiky.
- Spojité systémy ovlivněné diskrétními událostmi.

Oblasti výskytu HS

- Mechanické systémy
  - Spojitý pohyb ovlivněn fyzickou překážkou.
- Elektrické obvody
  - Spojitý průběh náboje řízený přepínači.
- Vestavné systémy
  - Počítačem řízené systémy v analogovém prostředí.

Skákající balónek

Popis systému

- Balónek upuštěn z výšky *h* na pevnou rovnou tvrdou podložku. Na balónek působí zemská přitažlivost (zrychlení 9.8m/s). Při odrazu balonku se část kinetické energie přemění v tření a teplo.

Fyzika

- Zrychlení = 1. derivace rychlosti podle času.
- Rychlost = 1. derivace výšky podle času.

Abstrakce a zjednodušení

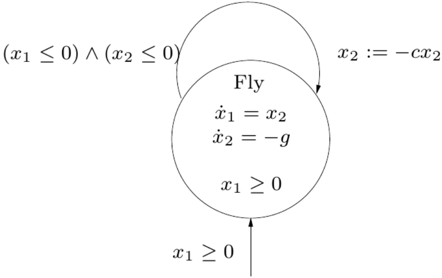
- Modelováno hmotným bodem.
- Instantní (bezčasový) odraz od země.

Skákající hmotný bod – hybridní automat

Popis automatu

- $x1$ — výška
- $x2$ — vertikální rychlost pohybu (+ nahoru, − dolů)
- $c \in [0, 1]$ — ztráta hybnosti (pružnost a přeměna na teplo)

Schéma



Skákající balónek – Cvičení

Rozšíření příkladu

- Balónek je puštěn z výšky a zároveň uveden do pohybu horizontálním směrem směrem k překážce dané výšky.

Úkoly

- Rozšiřte model o komponentu horizontálního pohybu.
- Rozšiřte model na pohyb kulovitého tělesa s nenulovým poloměrem.
- Rozšiřte model kulovitého tělesa o fázi deformace tělesa v době odrazu balónku, tj. v době kontaktu se zemí.

Převodovka

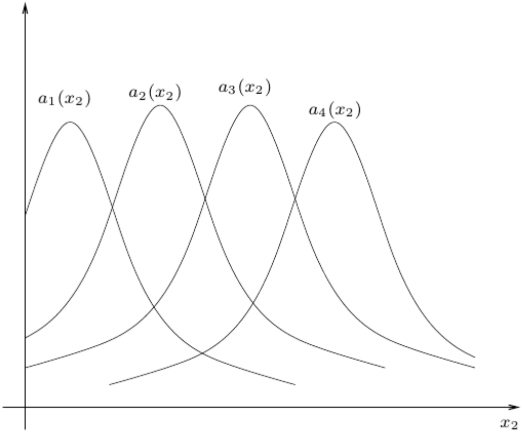
Popis problému

- Motorové vozidlo poháněné motorem a čtyřmi převodovými stupni vyjíždí z bodu A (s nulovou počáteční rychlostí) a jede směrem k bodu B.

Zjednodušení

- Zanedbáno tření, modelováno hmotným bodem.
- Bezčasová změna zařazené rychlosti.

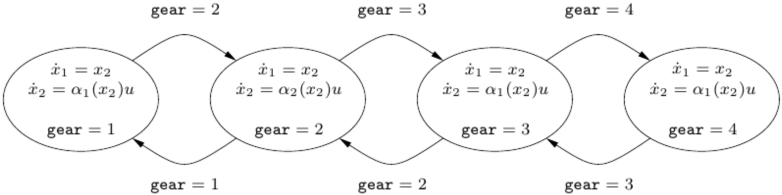
Převodovka – efektivita převodových stupňů



Popis automatu

- $x1$ — ujetá vzdálenost
- $x2$ — rychlost
- $gear \in [1, 2, 3, 4]$ — zařazený rychlostní stupeň
- $u \in [umin, umax]$ — pozice plynového pedálu

Schéma



Rozšíření příkladu

- Změna rychlostního stupně není bezčasová.

Úkoly

- Rozšiřte model o simulaci časové prodlevy v okamžiku změny rychlostního stupně.
- Rozšiřte model o možnost řazení "ob jeden"stupeň.
- Rozšiřte model o komponentu tření (záporné zrychlení), která roste kvadraticky vůči rychlosti vozidla.

Otázky

- Jaká doba uběhne mezi 4. a 5. odrazem balónku.
- Jaká je optimální strategie řazení rychlostních stupňů pro dosažení rychlosti 100 km/h v nejkratším možném čase?
- Jaká je maximální rychlost vozidla?
- Pro které rychlostní stupně lze dosáhnout maximální rychlosti?

Hledání odpovědí

- Nutnost přesného (formálního) popisu hybridního systému.
- Algoritmické metody pro analýzu vlastností hybridních systémů a syntézu kontrolérů a řídících strategií.

Požadavky na modelovací systém

Dostatečně popisně obecný

- Popis diskrétní i spojité složky modelovaného systému.
- Vyjádření nejistoty doby trvání (spojitá složka) a nejistoty volby (diskrétní složka).

Umožňující abstrakce

- Zjednodušené modelování komplexních systémů.

Kompozicionální

- Možnost kompozice složitějších systémů z jednodušších.
- Interakce komponent.

Hybridní automaty

Hybridní automaty

Hybridní automat je osmice

- $Q = \{q1, q2, \ldots\}$ — množina diskrétních stavů
- $X = \mathbf{R}^n$ — množina spojitých stavů
- $f : Q \times X \to \mathbf{R}^n$ — vektorové pole
- $\mathit{Init} \subseteq Q \times X$ — množina iniciálních stavů
- $\mathit{Dom} : Q \to \mathit{PowerSet}(X)$ — doména stavu (invariant stavu)
- $E \subseteq Q \times Q$ — množina diskrétních přechodů
- $G : E \to \mathit{PowerSet}(X)$ — mapa stráží přechodů
- $R : E \times X \to \mathit{PowerSet}(X)$ — mapa resetů přechodů

Stav hybridního automatu

Stav hybridního automatu

- Určen aktuálním diskrétním stavem a valuací spojitých proměnných: $(q, \overrightarrow{x}) \in Q \times X$.

Iniciální stav

- Množina iniciálních stavů jak v diskrétní, tak i ve spojité složce.
- $(q_0, \overrightarrow{x_0}) \in I$

Přechod hybridního automatu

Plynutím času

- Označme výchozí stav $(q, \overrightarrow{x})$.
- Spojitá složka pro každou proměnnou x z vektoru $\overrightarrow{x}$ plyne dle předepsané diferenciální rovnice

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(q, x), \text{ přičemž } x(0) = x$$

- Diskrétní složka je po tuto dobu neměnná.

$$q(t) = q$$

- Čas může plynout pouze pokud platí invariant stavu

$$x(t) \in Dom(q)$$

Přechod hybridního automatu ze stavu $(q0, x0)$

Diskrétním přechodem

- Je-li výchozí stav $(q, \overrightarrow{x})$.
- je možné (ne však nutné) provést přechod dle hrany

$$(q, q') \in E,$$

- pokud platí stráž hrany, tj.

$$\overrightarrow{x} \in G(q, q').$$

- V případě provedení přechodu, se modifikuje spojitá složka

$$\overrightarrow{x'} := R((q, q'), \overrightarrow{x})$$

- Cílový stav po provedení diskrétního přechodu je $(q', \overrightarrow{x'})$.

Rozumná omezení Hybridních Automatů

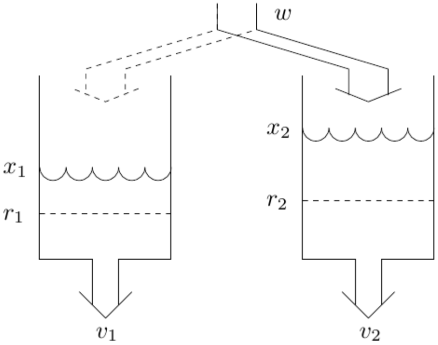
Omezení ve spojité složce

- $f(q, \overrightarrow{x})$ je Lipschitz spojitá pro $\forall q \in Q$,
  (řešení diferenciálních rovnic je dobře definované)
- $\forall e \in E$ předpokládáme neprázdné $G(e)$
- $\forall e \in E$ a $\forall x \in Q$ předpokládáme neprázdné $R(e, x)$

Omezení v diskrétní složce

- Množina diskrétních stavů Q je konečná.

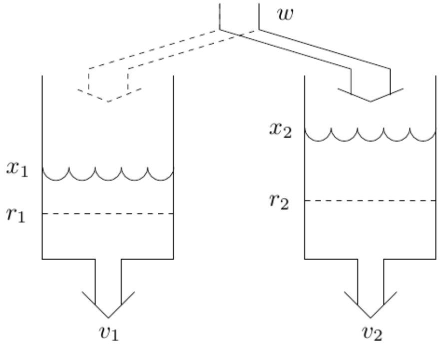
Vodní nádrže



Popis systému

- Systém dvou vodních nádrží, objem vody v nádržích x_1 a x_2.
- Z obou nádrží prosakuje voda konstantní rychlostí v_1 a v_2.
- Konstantní rychlostí w přitéká voda z hadice.
- Hadice je vždy buď v jedné, nebo v druhé nádrži.

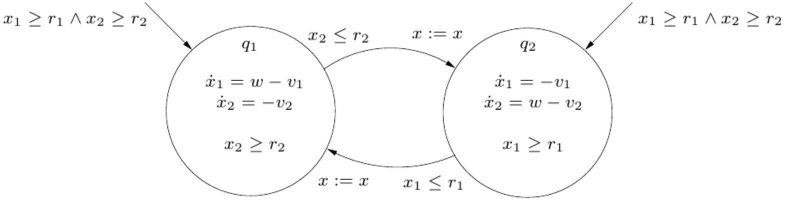
Vodní nádrže



Cíl

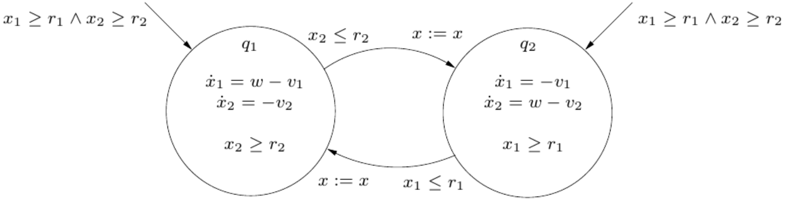
- Udržet objem vody v nádržích nad stanovené hranice r_1 a r_2.
- V počátečním stavu je objem vody dostačující.
- Spouštěčem pro změnu pozice hadice je okamžik, kdy objem vody v nějaké nádrži klesne na požadované minimum.

Vodní nádrže — Formální definice systému



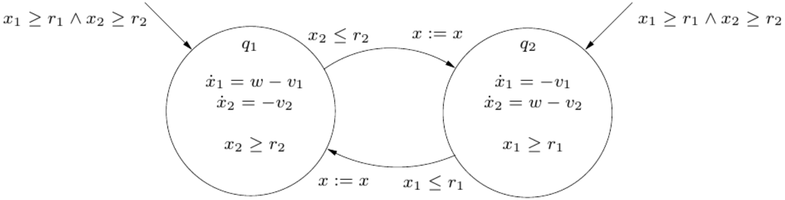
- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$
- $f(q_1, x) = \begin{bmatrix} w - v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \quad f(q_2, x) = \begin{bmatrix} -v_1 \\ w - v_2 \end{bmatrix}$

Vodní nádrže — Formální definice systému



- $Init = \{q_1, q_2\} \times \{x \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x_1 \geq r_1 \wedge x_2 \geq r_2\}$
- $Dom(q_1) = \{x \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x_2 \geq r_2\}$
  $Dom(q_2) = \{x \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x_1 \geq r_1\}$

Vodní nádrže — Formální definice systému



- $E = \{(q_1, q_2), (q_2, q_1)\}$
- $G(q_1, q_2) = \{x \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x2 \leq r2\}$
  $G(q_2, q_1) = \{x \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x_1 \leq r_1\}$
- $R(q_1, q_2, x) = R(q_2, q_1, x) = \{x\}$

Hybridní časová řada

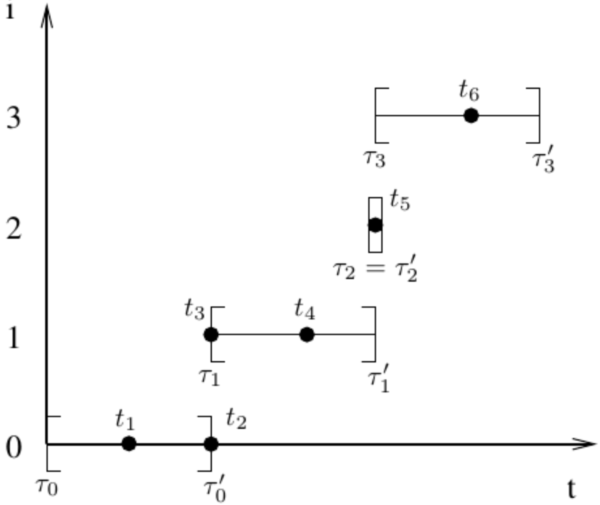
Neformálně

- Běh hybridního systému probíhá v po sobě jdoucích spojitě plynoucích úsecích. V instantních časových okamžicích na pomezí jednotlivých úseků se dějí diskrétní skoky systému.
- Časové charakteristika běhu hybridního systému je formalizována s využitím tzv. **Hybridní časové řady**.

Definice

- Hybridní časová řada je (konečná, či nekonečná) sekvence intervalů $\tau = \{I_0, I_1, \ldots, I_N\} = \{I_i\}_{i=0}^{N}$ taková, že:
  - $I_i = [\tau_i, \tau_i']$ pro všechna $i < N$
  - Pokud $N < \infty$, pak buď $I_N = [\tau_N, \tau_N']$, nebo $I_N = [\tau_N, \tau_N')$
  - $\tau_i \leq \tau_i' = \tau_{i+1}$ pro všechna $0 \leq i < N$.

Grafické znázornění hybridní časové řady



Uspořádání časových okamžiků

Pozorování

- Je-li každý časové okamžik spojen s nějakým intervalem,
- pak lze časové okamžiky lineárně uspořádat.

Uspořádání $\prec$

- $t_1 \in I_i,\ t_2 \in I_j$
- $t_1 \prec t_2 \stackrel{def}{=} (t_1 < t_2) \vee (t_1 = t_2 \wedge i < j)$

Zobecnění

- Každá hybridní časová řada je lineárně uspořádána relací $\prec$.

Prefix hybridní časové řady

- $\tau = \{I_i\}_{i=0}^{N}$
- $\hat{\tau} = \{\hat{I}_i\}_{i=0}^{M}$
- Říkáme, že τ je prefixem $\hat{\tau}$ (značíme $\tau \sqsubseteq \hat{\tau}$), pokud

  $\tau = \hat{\tau}$, nebo

  N je konečné $\wedge\ I_N \subseteq \hat{I}_N \wedge \forall i \in [0, N) : I_i = \hat{I}_i$

Striktní prefix

- $\tau \sqsubset \hat{\tau} \quad \equiv \quad \tau \sqsubseteq \hat{\tau}\ \wedge\ \tau \neq \hat{\tau}$

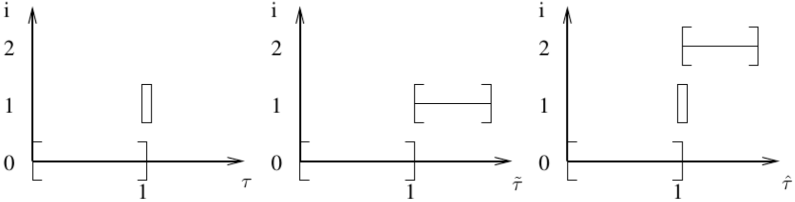
Relace $\sqsubseteq$ je částečné uspořádání

- Existují τ a $\widehat{\tau}$ takové, že $\tau \not\sqsubseteq \widehat{\tau}$ a $\widehat{\tau} \not\sqsubseteq \tau$

Příklad – Najděte $\tau, \widetilde{\tau}$ a $\widehat{\tau}$ tak, aby

- $\tau \sqsubseteq \widetilde{\tau}$
- $\tau \sqsubseteq \widehat{\tau}$
- $\widetilde{\tau} \not\sqsubseteq \widehat{\tau} \wedge \widehat{\tau} \not\sqsubseteq \widetilde{\tau}$

Řešení



Definice

- Hybridní trajektorie je trojice (τ, q, x), kde τ je hybridní časová řada $\tau = \{I\}_0^N$ a dvě posloupnosti funkcí $q = \{q_i\}_0^N$, kde $q_i : I_i \to Q$, a $x = \{x_i\}_0^N$, kde $x_i : I_i \to \mathbf{R}^n$.

Intuice

- Spojitá složka hybridního automatu plyne v rámci jednotlivých intervalů časové hybridní řady.
- V rámci jednoho intervalu je diskrétní stav neměnný.
- Diskrétní přechody realizují přechod na následující interval hybridní časové řady.

Běh hybridního automatu

- Hybridní automat $\mathcal{H} = (Q, X, f, Init, Dom, E, G, R)$.
- Hybridní trajektorie (τ, q, x).
- Trajektorie (τ, q, x) je během automatu $\mathcal{H}$, pokud definici $\mathcal{H}$ vyhovuje: iniciální podmínka, diskrétní chování a spojité chování.

Iniciální podmínka

- $(q_0(0), x_0(0)) \in Init$

Diskrétní chování – Pro všechna $i < N$ platí

- $(q_i(\tau_i'), q_{i+1}(\tau_{i+1})) \in E$
- $x_i(\tau') \in G(q_i(\tau_i'), q_{i+1}(\tau_{i+1}))$
- $x_{i+1}(\tau_{i+1}) \in R(q_i(\tau_i'), q_{i+1}(\tau_{i+1}), x_i(\tau_i'))$

Běh hybridního automatu

- Hybridní automat $\mathcal{H} = (Q, X, f, Init, Dom, E, G, R)$.
- Hybridní trajektorie (τ, q, x).
- Trajektorie (τ, q, x) je během automatu $\mathcal{H}$, pokud definici $\mathcal{H}$ vyhovuje: iniciální podmínka, diskrétní chování a spojité chování.

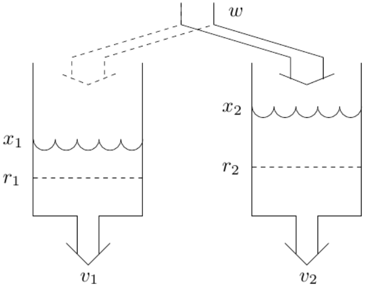
Spojité chování – Pro všechna $i \leq N$ platí

- $q_i : I_i \to Q$ je konstantní nad $t \in I_i$,
- $x_i : I_i \to X$ je řešením diferenciální rovnice

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f(q_i(t), x_i(t))$$

  nad intervalem I_i začínajícím v $x_i(\tau_i)$,
- Pro všechna $t \in [\tau_i, \tau_i')$ platí $x_i(t) \in Dom(q_i(t))$.

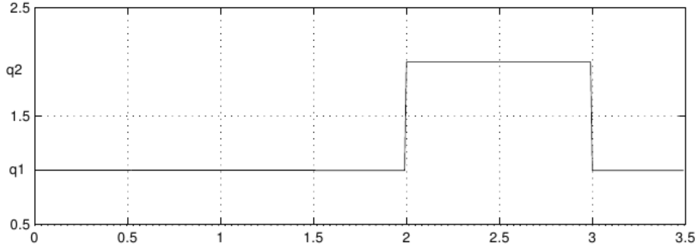
Vodní nádrže – příklad

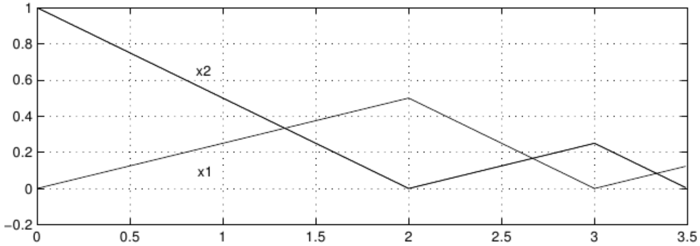


Konkretizace

- $\tau = \{[0,2],[2,3],[3,3.5]\}$
- Konstanty $r_1 = r_2 = 0$, $v_1 = v_2 = 0.5$, $w = 0.75$
- Iniciální stav $q = q_1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Vodní nádrže – trajektorie





Klasifikace běhů

Konečný

- Pokud τ je konečná a poslední interval v τ je uzavřený.

Nekonečný

- Pokud τ je nekonečná sekvence, nebo součet časových intervalu v τ je nekonečno, t.j.

$$\Sigma_{i=0}^{N}(\tau_i' - \tau_i) = \infty.$$

Zeno

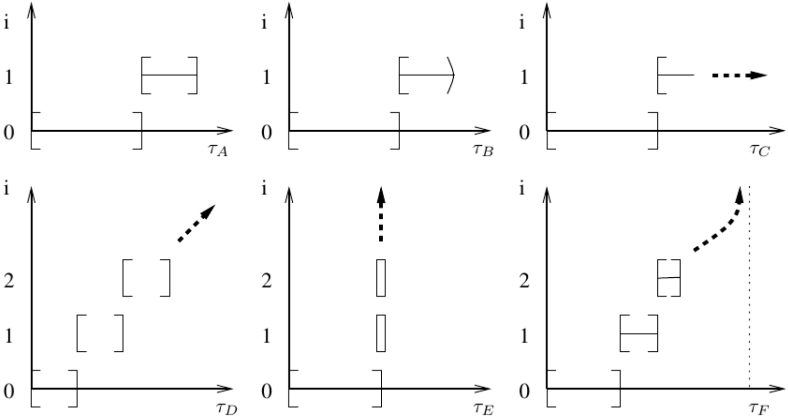
- Pokud je τ nekonečná, ale

$$\Sigma_{i=0}^{N}(\tau_i' - \tau_i) < \infty.$$

Maximální

- Pokud není striktním prefixem žádného jiného běhu $\mathcal{H}$.

Klasifikace běhů



τ_A konečný, τ_C a τ_D nekonečné, τ_E a τ_F Zeno.
Jaký je τ_B?