IV120 Spojité a hybridní systémy

Základní pojmy teorie řízení

David Šafránek
Jiří Barnat
Jana Fabriková

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

EVROPSKÁ UNIE

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Problém řízení

Mějme dynamický systém $\mathcal{S}$ definovaný stavovou rovnicí:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Problém řízení

Pro zvolenou dvojici iniciální stavu $x(t_0)$ a koncového stavu $x(t_1)$ **určit řídící veličinu** $u(t)$ **umožňující dosažení** $x(t_1)$ **z** $x(t_0)$ **v konečném čase**.

- Problém lze rozdělit na existenční a konstruktivní část.
- Existuje-li řešení problému řízení, nemusí být nutně jednoznačně určené. Proto je často hledáno *optimální řízení*, které vyhovuje zadané specifikaci.

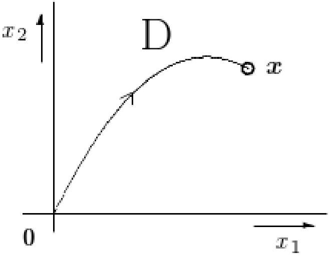
Pojem dosažitelnosti ve stacionárním systému

Problém řízeení vyžaduje dosažitelnost koncového bodu v konečném čase. Pojem **dosažitelnosti** je tedy zásadní.

Dosažitelnost

Stav x je **dosažitelný**, pokud existuje řízení $u(t)$, které za konečný čas převede stav $x(t_0) = 0$ do stavu x.

Systém je dosažitelný pokud každý jeho stav je dosažitelný.



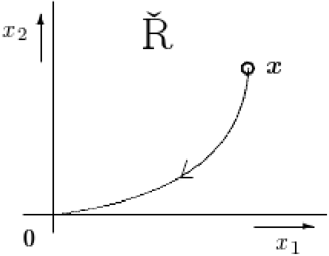
Pojem řiditelnosti ve stacionárním systému

Při řízení systému může být důležitou vlastností dosažitelnost počátečního bodu v konečném čase.

Řiditelnost

Stav x je **řiditelný**, pokud existuje řízení $u(t)$, které za konečný čas převede stav x do stavu 0.

Jsou-li všechny stavy systému řiditelné, pak hovoříme o **řiditelném systému**.



Řiditelnost a dosažitelnost

Pojmy řiditelnosti a dosažitelnosti mohou splývat – potom je každý dosažitelný stav řiditelný a naopak.

Existují systémy, kde množina dosažitelných stavů není totožná s množinou řiditelných stavů.

Jak se projeví nestacionarita systému?

Řiditelnost a dosažitelnost

Pojmy řiditelnosti a dosažitelnosti mohou splývat – potom je každý dosažitelný stav řiditelný a naopak.

Existují systémy, kde množina dosažitelných stavů není totožná s množinou řiditelných stavů.

Jak se projeví nestacionarita systému?
Nutno vázat oba pojmy na čas, tj. zkoumat dosažitelnost a řiditelnost události $(t, x(t))$.

Řiditelnost a dosažitelnost v lineárních spojitých systémech

Uvažujme lineární systém definovaný stavovou rovnicí:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Řešení stavové rovnice:

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Kritérium dosažitelnosti

Předpokládejme $x(0) = 0$. Stav x je dosažitelný, pokud existuje časový okamžik t a řízení $u(\tau)$, $0 \leq \tau < t$ splňující $x = x(t) = e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$.

Kritérium řiditelnosti

Předpokládejme $x(t) = 0$. Stav x je řiditelný, pokud existuje okamžik t a řízení $u(\tau)$, $0 \leq \tau < t$ splňující $x = x(0) = -\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$.

Řiditelnost a dosažitelnost v lineárních spojitých systémech

- jaký je vztah mezi řiditelnými a dosažitelnými stavy lineárního spojitého systému?
- existují stavy které jsou pouze řiditelné a nikoliv dosažitelné?
- existují stavy pouze dosažitelné a nikoliv řiditelné?

Řiditelnost a dosažitelnost v lineárních spojitých systémech

- jaký je vztah mezi řiditelnými a dosažitelnými stavy lineárního spojitého systému?
- existují stavy které jsou pouze řiditelné a nikoliv dosažitelné?
- existují stavy pouze dosažitelné a nikoliv řiditelné?

Řiditelné a dosažitelné stavy lineárního systému incidují.

Fakt

Každou konvergující nekonečnou maticovou řadu čtvercové matice A řádu n lze vyjádřit jako polynom v mocninách matice A, stupně p.

Přitom platí:

p je stupněm minimálního polynomu $\Phi(\lambda)$ matice A, tedy minimální p pro něž polynom

$$\Phi(\lambda) = \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + ... + a_0$$

splňuje

$$\Phi(A) = A^p + a_{p-1}A^{p-1} + ... + a_0 I = 0$$

kde I je jednotková matice, $p \leq n$.

Exponenciální matici lze vyjádřit ve tvaru:

$$e^{A\tau} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(\tau) A^i$$

Dosadíme-li do kritéria řiditelnosti, dostaneme:

$$x = -\int_0^t \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(\tau) A^i B u(\tau) d\tau$$

Dále rozepíšeme vektor řízení:

$$u(\tau) = \sum_{j=1}^{r} u_j(\tau) e_j$$

kde e_j je bázový vektor s j-tou pozicí nenulovou.

Kritérium řiditelnosti přepíšeme po složkách vektoru řízení:

$$x = -\int_0^t \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i(\tau) A^i B u_j(\tau) e_j d\tau$$

což lze dále přepsat:

$$x = -\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \alpha_i(\tau) u_j(\tau) d\tau A^i b_j$$

kde b_j je j-tý sloupec matice B.

Označíme-li $\beta_{ij} = -\int_0^t \alpha_i(\tau) u_j d\tau$, dostaneme pro stav x:

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} A^i b_j$$

Máme maticový vztah pro stav x, o jehož řiditelnosti rozhodujeme:

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} A^i b_j$$

β_{ij} je skalár, který může vhodnou volbou j-té složky řízení nabývat lib. konečné hodnoty.

Lze tedy uzavřít:

Stav x je řiditelný, pokud leží v prostoru generovaném množinou vektorů

$$\bigcup_{i=1}^{r} b_i \cup \bigcup_{i=1}^{r} Ab_j \cup \ldots \cup \bigcup_{i=1}^{r} A^{p-1} b_j$$

K potvrzení řiditelnosti je tedy nutné nalézt n lin. nezávislých vektorů ve výše uvedené množině.

Věta (kritérium řiditelnosti (dosažitelnosti))

Lineární spojitý systém definovaný stavovou rovnicí $\dot{x} = Ax + Bu$ je dosažitelný a řiditelný právě tehdy, když složená matice $R^{n \times rn}$, $R = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$, má hodnost $h(R) = n$.

Definice

Matice R z přechozí věty se nazývá **maticí řiditelnosti (dosažitelnosti) systému.**

Poznámka

- Jelikož kritérium je nezávislé na hodnotě β_{ij}, lze volit jakékoliv $t \neq 0$ a platí: Je-li stav x řiditelný (dosažitelný), pak je řiditelný (dosažitelný) v libovolně krátké době.
- Není-li systém řiditelný (dosažitelný), pak množina řiditelných (dosažitelných) stavů je podrpostorem generovaným sloupci matice R.

Definice

Uvažme matici řiditelnosti $R_k = [B, AB, A^2B, ..., A^{k-1}B]$.
Nejmenší přirozené číslo κ splňující rovnici:

$$hod(R_\kappa) = hod(R_{\kappa+1})$$

se nazývá **index řiditelnosti (dosažitelnosti) systému**.

Poznámka

Index řiditelnosti (dosažitelnosti) je vždy shora neostře ohraničen řádem systému n. Pro řiditelný (dosažitelný) systém je κ omezeno vztahem:

$$\frac{n}{r} \leq \kappa \leq n - r + 1$$

Uvažte lineární systém:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Sestavte matici řiditelnosti:

Uvažte lineární systém:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Sestavte matici řiditelnosti:

$$P = [B, AB, A^2 B]$$

...

Pro lineární systémy byla formulována řada alternativních kritérií dosažitenosti/řiditelnosti.

- test pomocí vlastních vektorů
- test pomocí hodnosti
- využití kanonických tvarů

Pro detailní informace viz skripta [Štecha, Havlena].

Dosud jsme uvažovali stacionární systémy. Pro lineární nestacionární systémy je nutné upřesnit pojem dosažitelnosti/řiditelnosti.

Definice

Událost $(\tau, x(\tau))$ **je dosažitelná**, pokud existuje okamžik $\nu \leq \tau$ a řízení $u(t)$, $\nu \leq t \leq \tau$, které převede událost $(\nu, 0)$ do události $(\tau, x(\tau))$.

Pokud tvrzení platí pro vš. stavy $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$, říkáme, že **systém je dosažitelný v čase** τ.

Dosud jsme uvažovali stacionární systémy. Pro lineární nestacionární systémy je nutné upřesnit pojem dosažitelnosti/řiditelnosti.

Definice

Událost $(\tau, x(\tau))$ **je dosažitelná**, pokud existuje okamžik $\nu \leq \tau$ a řízení $u(t)$, $\nu \leq t \leq \tau$, které převede událost $(\nu, 0)$ do události $(\tau, x(\tau))$.

Pokud tvrzení platí pro vš. stavy $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$, říkáme, že **systém je dosažitelný v čase** τ.

Definice

Událost $(\tau, x(\tau))$ **je řiditelná**, pokud existuje okamžik $\mu \geq \tau$ a řízení $u(t)$, $\tau \leq t \leq \mu$, které převede událost $(\tau, x(\tau))$ do události $(\mu, 0)$.

Pokud tvrzení platí pro vš. stavy $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$, říkáme, že **systém je řiditelný v čase** τ.

Charakterizace řiditelnosti a dosažitelnosti v nestacionárních systémech je komplikovanější a zjišťování poměrně obtížné.

Řeší se pomocí transformace tzv. Gramovou maticí řiditelnosti.

Řízení výstupu v lineárních spojitých systémech

Někdy se zavádí pojem řiditelnosti i pro výstup systému.
Uvažujme systém daný stavovou rovnicí a výstupní funkcí:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Řiditelnost výstupu

Pokud existuje řízení, které převede výstup systému z dané hodnoty $y(t_0)$ na cílovou hodnotu $y(t_1)$ v konečném čase $t_1 - t_0$, **systém má řiditelný výstup**.

Tvrzení

Lineární stacionární systém má řiditelný výstup, je-li hodnost matice

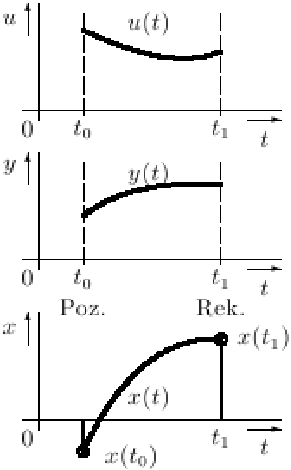
$$R_y = [D, CB, CAB, ..., CA^{n-1}B]$$

rovna počtu výstupů (velikosti výstupního vektoru m), $hod(R_y) = m$.

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost systémů

Typicky jsou vnitřní (stavové) veličiny systému skryté (neměřitelné). Pozorovat lze pouze vstup a výstup systému.

Zajímá nás otázka, zda měřením vstupu a výstupu dovedeme detekovat stav systému.



- **pozorovatelnost** – určujeme stav na počátku intervalu měření
- **rekonstruovatelnost** – určujeme stav na konci intervalu měření

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost systémů

Pozorovatelnost

Systém je pozorovatelný pokud je možné měřením vstupu a výstupu na konečném intervalu určit hodnotu stavu systému na počátku měření.

Nelze-li jednoznačně určit počáteční stav z těchto měření, pak říkáme. že systém obsahuje **nepozorovatelné stavy**.

Pozn.: Nepozorovatelné stavy se neprojeví na výstupu.

Rekonstruovatelnost

Systém je rekonstruovatelný pokud je možné měřením vstupu a výstupu na konečném intervalu určit hodnotu stavu systému na konci měření.

Jelikož uvažujeme deterministické systémy, pozorovatelnost vždy implikuje rekonstruovatelnost. Opačné tvrzení obecně neplatí. V reverzibilních systémech oba pojmy incidují.

Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost v lineárních spojitých systémech

Uvažujme lineární systém definovaný stavovou rovnicí:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Řešení stavové rovnice:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \underbrace{Ce^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{nezávislé na vnitřním stavu}}$$

Je-li známé řízení u, lze odečíst vyznačené členy od y. Bez újmy na obecnosti tedy budeme předpokládat nulové řízení.

Kritérium pozorovatelnosti

Věta (kritérium pozorovatelnosti)

Pro lineární stacionární spojitý systém platí:

Systém je pozorovatelný právě tehdy, když matice pozorovatelnosti P,

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \ldots CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

má hodnost rovnu řádu systému, $h(P) = n$.

Pozn.: Podobně jako v předch. případech, kritérium nezávisí na délce časového intervalu měření, proto lze měřit libovolně krátkou dobu.

Analogicky jako v přech. případech lze definovat **index pozorovatelnosti**.

Pozorovatelnost vs. rekonstruovatelnost

Uvažme systém S_1 daný soustavou:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t)$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^r$ a $y \in \mathbb{R}^m$.

Dále uvažujme systém S_2:

$$\dot{z}(t) = A^T(t)z(t) + C^T(t)w(t)$$
$$v(t) = B^T(t)z(t)$$

kde $z \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$ a $v \in \mathbb{R}^r$.

Princip duality

Je-li S_1 dosažitelný (resp. řiditelný), je systém S_2 pozorovatelný (resp. rekonstruovatelný) a naopak.

Dosud jsme uvažovali stacionární systémy. Pro lineární nestacionární systémy je nutné upřesnit pojem pozorovatelnosti/rekonstruovatelnosti.

Definice

Stav $x(\tau)$ **je pozorovatelný v čase** τ, pokud existuje okamžik ν, že znalost výstupu $y(t)$ pro $\tau \leq t \leq \nu$ umožní určit $x(\tau)$.

Charakterizace a analýza je opět komplikovanější (viz skripta [Stecha, Havlena]).

Název prvního slajdu

Tělo

- Hlava.
- Ruce.
- Nohy.

Pohlaví

- Muž ženu nebije, ale ...
- **žena muže bije.**