Princip úplné matematická indukce pro přirozená čísla (ÚMI)

Jde o metodu důkazu toho, že nějaké tvrzení T platí pro všechna přirozená čísla. Tento princip říká:
Platí-li
(1) $T(0)$ a
(2) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí následující implikace:
(Pro všechna $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ platí $T(k)) \Rightarrow T(n+1)$,
potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $T(n)$.

ÚMI se samožřejmě dá formulovat různě. Například místo (1) a (2) můžeme mít:
(3) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí následující implikace:
(Pro všechna $k \in \mathbb{N}, k < n$ platí $T(k)) \Rightarrow T(n)$

Původní (1) je zde "schována" v (3) při volbě $n = 0$.

Doporučuji se zamyslet:
Proč tento princip platí?
Jaký je rozdíl mezí principem matematické indukce a principem úplné matematické indukce?
Platí tento princip i pro libovolnou jinou nekonečnou posloupnost? Co je potřeba změnit při důkazu, že T platí pro všechna *kladná* přirozená čísla?

Příklad 1 Dokažte, že slovo $w = (A \to B) \vee (C \wedge D)$ není formulí výrokové logiky.

Řešení

Nejprve zaveďme značení: Nechť pro libovolné slovo x nad abecedou výrokové logiky značí $z(x)$ počet závorek a $b(x)$ počet binárních spojek ve slově x.

Dokážeme, že pro každou formuli φ platí $z(\varphi) = 2 * b(\varphi)$. Tím dokážeme, že w není formule, neboť pro w tato rovnost neplatí. Důkaz povedeme úplnou matematickou indukcí vzhledem k délce vytvořující posloupnosti. Dokážeme tedy, že pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ a každou formuli s vytvořující posloupností délky n platí daná rovnost. Rovnost proto platí pro každou formuli.

(1) Nechť φ je libovolná formule s vytvořující posloupností délky 1. Tedy $\varphi = A$, kde A je výroková proměnná. Platí $z(\varphi) = 2 * b(\varphi)$, neboť obě strany rovnice jsou 0.

(2) Nechť φ je libovolná formule s vytvořující posloupností $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}, \varphi$ kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ (n je tedy délka této vytvořující posloupnosti). Z definice formule víme, že φ má jeden z těchto tří tvarů:

(i) $\varphi = A$, kde A je výroková proměnná nebo

(ii) $\varphi = \neg\psi_i$, kde $1 \leq i < n$ nebo

(iii) $\varphi = (\psi_i \circ \psi_j)$, kde $1 \leq i < n$, $1 \leq j < n$, $\circ$ je některá z binárních spojek.

Pokud platí (i), pak $z(\varphi) = 0 = 2 * b(\varphi)$.

Pokud platí (ii), pak $z(\varphi) = z(\psi_i)$, $b(\varphi) = b(\psi_i)$. $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_i$ je vytvořující posloupnost formule ψ_i délky $i < n$. Z indukčního předpokladu: $z(\psi_i) = 2 * b(\psi_i)$, proto i $z(\varphi) = 2 * b(\varphi)$.

Pokud platí (iii), pak (*) $z(\varphi) = z(\psi_i) + z(\psi_j) + 2$ (závorky ve φ jsou všechny ty v podformulích ψ_i a ψ_j, navíc dvě vnější). Podobně jako v předchozím případě, pro ψ_i a ψ_j existuje vytvořující posloupnost délky $< n$, a proto pro ně platí z indukčního předpokladu: $z(\psi_i) = 2 * b(\psi_i)$ a $z(\psi_j) = 2 * b(\psi_j)$. Tyto rovnosti dohromady s (*) dávají: $z(\varphi) = z(\psi_i) + z(\psi_j) + 2 = 2 * b(\psi_i) + 2 * (\psi_j) + 2$ $= 2 * (1 + b(\psi_i) + b(\psi_j)) = 2 * b(\varphi)$ (binární spojky ve φ jsou všechny ty v podformulích ψ_i a ψ_j, navíc jedna, která tyto podformule spojuje).

Dokázali jsme tedy, že pro každou formuli φ platí rovnost $z(\varphi) = 2 * b(\varphi)$. Pro slovo w tato rovnost neplatí, a proto není formulí. $\square$

Všimněte si, co je jádrem důkazu. Je vlastně potřeba dokázat, že

(1) Formule A (kde A je libovolná výroková proměnná) má danou vlastnost.

(2) Pokud formule ψ má danou vlastnost, pak i formule $\neg\psi$ má danou vlastnost.

(3) Pokud formule ψ a φ mají danou vlastnost, pak i formule $(\psi \circ \varphi)$ má danou vlasntost, kde $\circ$ je libovolná binární spojka (v našem jazyce výrokové logiky).

Tomuto typu důkazu říkáme indukce vzhledem ke struktuře formule (zkráceně strukturální indukce). Z (meta)konjunkce (1), (2) a (3) plyne, že každá formule má danou vlastnost. Jak je vidět na příkladu 1, princip strukturální indukce se opírá o princip úplné matematické indukce. Indukční krok úplné matematické indukce vzhledem k délce vytvořující posloupnosti se "rozpadne" na 3 případy - všechny možné struktury formule.

Příklad 2 Pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ (přirozené kladné číslo) označme M_n množinu všech formulí, pro které existuje vytvořující posloupnost délky n. Dále nechť $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ je funkce definovaná následovně: $f(n) = max\{|\varphi| \mid \varphi \in M_n\}$. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$ platí: $f(n) = 2^{n+1} - 3$.

Řešení

Rovnost dokážeme jako dvě nerovnosti:

(1) $f(n) \geq 2^{n+1} - 3$

(2) $f(n) \leq 2^{n+1} - 3$

Důkaz (1): Najdeme pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ formuli φ_n takovou, že $|\varphi_n| = 2^{n+1} - 3$ a $\varphi_n \in M_n$. Když v M_n leží formule délky x, pak maximální délka formule v M_n je alespoň x, proto $f(n) \geq 2^{n+1} - 3$.

Nechť $\varphi_1 = A$ a pro každé $n \in \mathbb{N}, n > 1$: $\varphi_n = (\varphi_{n-1} \to \varphi_{n-1})$. Matematickou indukcí vzhledem k n dokážeme, že $|\varphi_n| = 2^{n+1} - 3$.

Pro $n = 1$: $|\varphi_1| = |A| = 1 = 2^{1+1} - 3$.

Nechť pro $n \in \mathbb{N}^+$ platí $|\varphi_n| = 2^{n+1} - 3$. Pak $|\varphi_{n+1}| = 2 * |\varphi_n| + 3$ (dvě závorky, jedna binární spojka, dvě podformule) $= 2*(2^{n+1}-3)+3$ (z indukčního předpokladu) $= 2^{(n+1)+1} - 3$ (aritmetická úprava).

(Kdybychom chtěli být hodně precizní, ještě bychom dokázali, že pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$ je φ_n formule, ne jen slovo. Je to nicméně celkem 'zřejmé').

Důkaz (2): Důkaz povedeme matematickou indukcí vzhledem k n.

Pro $n = 1$ nerovnost platí: $f(1) = 1$ (V množině M_1 jsou právě formule délky 1) $\leq 2^{1+1} - 3$.

Nechť $n \in \mathbb{N}^+$ a platí $f(n) \leq 2^{n+1} - 3$. Mějme nyní libovolnou formuli $\varphi \in M_{n+1}$. Pro φ tedy existuje vytvořující posloupnost délky $n+1$, označme ji $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, \varphi$. Podle definice formule musí být φ jednoho z následujících tří tvarů:

(1) $\varphi = A$. Nerovnost pak zřejmě platí: $|A| = 1 \leq 2^{(n+1)+1} - 3$ pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$.

(2) $\varphi = \neg\psi_i$ pro nějaké $i \in \mathbb{N}^+$, $i \leq n$. ψ_i patří do M_n, $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{i-1}, \psi_i$ je její vytvořující posloupnost. (Je jasné, že když $i < n$, můžeme k této vytvořující posloupnosti na začátek přidat například formule $A_1, A_2, ..., A_{n-i}$ a tím získat vytvořující posloupnost formule ψ_i délky n). Z indukčního předpokladu pak platí: $f(n) \leq 2^{n+1} - 3$, proto i $|\psi_i| \leq 2^{n+1} - 3$. Platí tedy $|\varphi| = |\psi_i| + 1 \leq 2^{n+1} - 3 + 1 \leq 2^{(n+1)+1} - 3$ pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$.

(3) $\varphi = (\psi_i \circ \psi_j)$ pro nějaká $i, j \in \mathbb{N}^+$, $i, j \leq n$, $\circ$ je nějaká binární spojka. ψ_i, ψ_j patří do M_n (stejně jako ψ_i ve (2)). Z indukčního předpokladu platí: $f(n) \leq 2^{n+1} - 3$, proto i $|\psi_i| \leq 2^{n+1} - 3$ a $|\psi_j| \leq 2^{n+1} - 3$. Platí tedy $|\varphi| = |\psi_i| + |\psi_j| + 3 \leq 2 * (2^{n+1} - 3) + 3 = 2^{(n+1)+1} - 3$. $\square$

Protože jsme si všimli, že $\varphi \in M_i \Rightarrow \varphi \in M_n$ pro $i < n$, stačila nám (neúplná) matematická indukce. Pokud bychom si toho nevšimli/vedli důkaz trochu jinak, potřebovali bychom úplnou matematickou indukci, abychom měli nerovnost pro všechny formule ve vytvořující posloupnosti formule φ, ne jen pro tu předposlední.