



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Definujte, co je jazyk \mathcal{L} predikátové logiky (bez rovnosti).

Příklad 1

Definujte, co je realizace \mathcal{M} jazyka \mathcal{L} .

20 bodů

Definujte, co je ohodnocení e v realizaci \mathcal{M} .

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ bez rovnosti, kde oba symboly jsou unární predikátové.

Příklad 2

O každé z následujících formulí φ jazyka \mathcal{L} rozhodněte, zda je to tautologie.

10 bodů

Pokud není, dejte příklad realizace \mathcal{M} jazyka \mathcal{L} takové, že $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

a) $\varphi \equiv (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$;

b) $\varphi \equiv \forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$;

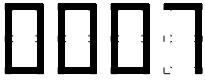
c) $\varphi \equiv (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$;

d) $\varphi \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$.

Dejte příklad formule φ , která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formulí $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C$.

Příklad 3

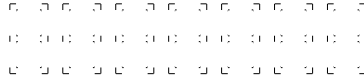
10 bodů



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovnostmi, kde \cdot je binární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci \mathcal{M} , kde nosičem je množina \mathbb{D}_4 všech symetrií čtverce a \cdot se realizuje jako skládání. (Připomeňme, že \mathbb{D}_4 sestává z identity, tří rotací a čtyř osových symetrií.)

Příklad 4 26 bodů

Zadejte formuli $\varphi(x, y)$ jazyka \mathcal{L} takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi[e], \text{ právě když:}$$

- a) $e(x)$ je identita;
- b) $e(x)$ je rotace o 90° (libovolným směrem);
- c) $e(x)$ je osová symetrie;
- d) $e(x)$ a $e(y)$ jsou osové symetrie podle navzájem kolmých přímk.



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

Příklad 5**48 bodů**

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

- a) Pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ dejte příklad formule $\varphi_{\leq n}$ jazyka \mathcal{L} takové, že pro každou realizaci \mathcal{M} jazyka \mathcal{L} platí $\mathcal{M} \models \varphi_{\leq n}$, právě když nosič realizace \mathcal{M} je nejvýš n -prvkový.
- b) Uvažme teorii $T = \{\varphi_{\leq 3}, P(c), f(c) \neq c, f(x) = f(y) \rightarrow x = y\}$ nad jazykem \mathcal{L} . Popište kanonickou strukturu \mathcal{M} teorie T . Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.
- c) Dejte příklad formule ψ jazyka \mathcal{L} tak, aby teorie $T' = T \cup \{\psi\}$ byla nekonzervativním rozšířením teorie T a přitom pro kanonickou strukturu \mathcal{M}' teorie T' platilo $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Platí při vaší volbě formule ψ , že teorie T' je konzervativním rozšířením teorie T zúžené na jazyk $\{f, c\}$ (s rovností)? Lze zvolit formuli ψ i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Své odpovědi zdůvodněte.

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť $z(\varphi)$ značí počet závorek ve formuli φ . Najděte co nejmenší $r \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou formuli φ systému $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$ výrokové logiky platí $z(\varphi) \leq r \cdot |\varphi|$, a dokažte, že tomu tak skutečně je.

Příklad 6
20 bodů

0007

list

5

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Nechť \mathcal{L} je jazyk aritmetiky. Z přednášky známe teorii jazyka \mathcal{L} zvanou Peanova aritmetika. Připomeňme, že $PA = T \cup T'$, kde

$T = \{s(x) = s(y) \rightarrow x = y, s(x) \neq 0, x + 0 = x, x + s(y) = s(x + y), x \cdot 0 = 0, x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x\}$
a $T' = \{(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x)))) \rightarrow \forall x \varphi(x) \mid \varphi(x) \text{ je formule jazyka } \mathcal{L}\}$. Další zajímavou teorií jazyka \mathcal{L} je tzv. Robinsonova aritmetika $RA = T \cup \{\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(s(y) = x))\}$.

Dokažte, že Peanova aritmetika je nekonzervativním rozšířením Robinsonovy aritmetiky.

Nápověda: uvažte realizaci \mathcal{M} jazyka \mathcal{L} , kde nosičem je množina všech polynomů s celočíselnými koeficienty, jejichž vedoucí koeficient je kladný, společně s nulovým polynomem (funkční symboly jsou realizovány obvyklým způsobem).

Příklad 7**26 bodů**