0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 1
20 bodů

Definujte, co je jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky (bez rovnosti).
Definujte, co je realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$.

Příklad 2
10 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ bez rovnosti, kde oba symboly jsou unární predikátové. O každé z následujících formulí φ jazyka $\mathcal{L}$ rozhodněte, zda je to tautologie. Pokud není, dejte příklad realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ takové, že $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

a) $\varphi \equiv (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$;
b) $\varphi \equiv \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$;
c) $\varphi \equiv (\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \wedge Q(x))$;
d) $\varphi \equiv \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x))$.

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ, která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli $(A \to B) \leftrightarrow C$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 4
26 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{D}_4$ všech symetrií čtverce a $\cdot$ se realizuje jako skládání. (Připomeňme, že $\mathbb{D}_4$ sestává z identity, tří rotací a čtyř osových symetrií.)

Zadejte formuli $\varphi(x, y)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když:}$$

a) $e(x)$ je identita;
b) $e(x)$ je rotace o $90\,^\circ$ (libovolným směrem);
c) $e(x)$ je osová symetrie;
d) $e(x)$ a $e(y)$ jsou osové symetrie podle navzájem kolmých přímek.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
48 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ dejte příklad formule $\varphi_{\leq n}$ jazyka $\mathcal{L}$ takové, že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models \varphi_{\leq n}$, právě když nosič realizace $\mathcal{M}$ je nejvýš n-prvkový.

b) Uvažme teorii $T = \{\varphi_{\leq 3},\ P(c),\ f(c) \neq c,\ f(x) = f(y) \to x = y\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$. Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.

c) Dejte příklad formule ψ jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby teorie $T' = T \cup \{\psi\}$ byla nekonzervativním rozšířením teorie T a přitom pro kanonickou strukturu $\mathcal{M}'$ teorie T' platilo $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Platí při vaší volbě formule ψ, že teorie T' je konzervativním rozšířením teorie T zúžené na jazyk $\{f, c\}$ (s rovností)? Lze zvolit formuli ψ i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Své odpovědi zdůvodněte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
20 bodů

Nechť $z(\varphi)$ značí počet závorek ve formuli φ. Najděte co nejmenší $r \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou formuli φ systému $\mathcal{L}(\neg, \to)$ výrokové logiky platí $z(\varphi) \leq r \cdot |\varphi|$, a dokažte, že tomu tak skutečně je.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
26 bodů

Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk aritmetiky. Z přednášky známe teorii jazyka $\mathcal{L}$ zvanou Peanova aritmetika. Připomeňme, že $PA = T \cup T'$, kde
$T = \{s(x) = s(y) \to x = y,\ s(x) \neq 0,\ x + 0 = x,\ x + s(y) = s(x + y),\ x \cdot 0 = 0,\ x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x\}$
a $T' = \{(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(s(x)))) \to \forall x\, \varphi(x) \mid \varphi(x)$ je formule jazyka $\mathcal{L}\}$. Další zajímavou teorií jazyka $\mathcal{L}$ je tzv. Robinsonova aritmetika $RA = T \cup \{\forall x(x \neq 0 \to \exists y(s(y) = x))\}$.
Dokažte, že Peanova aritmetika je nekonzervativním rozšířením Robinsonovy aritmetiky.
Nápověda: uvažte realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde nosičem je množina všech polynomů s celočíselnými koeficienty, jejichž vedoucí koeficient je kladný, společně s nulovým polynomem (funkční symboly jsou realizovány obvyklým způsobem).