Zkoušky z předmětu MA007
Matematická logika

Obsah

list *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol.
Definujte, co je realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$.
Definujte sémantiku formulí φ jazyka $\mathcal{L}$, tj. kdy platí $\mathcal{M} \models \varphi\,[e]$.

Příklad 2
10 bodů

Víme, že P je predikátový symbol a f, g jsou funkční symboly. O každém z následujících výrazů rozhodněte, zda se může jednat o term, a pokud ano, napište pro něj nějakou vytvořující posloupnost:
a) x;
b) $f(f(x), x)$;
c) $P(f(x), x)$;
d) $g(f(f(x)), y, f(x))$.

Příklad 3
12 bodů

Nechť $\curlywedge$ značí operátor NOR, tj. $\psi \curlywedge \xi \;\approx\; \neg(\psi \vee \xi)$. Dejte příklad formule φ systému $\mathcal{L}(\curlywedge)$ výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli $(A \leftrightarrow B)$. Určete délku vaší formule φ.

Příklad 4
42 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot, f\}$ s rovností, kde všechny symboly jsou funkční s aritami po řadě 2, 2, 1. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{R}$, kde nosičem je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, $+$ se realizuje jako sčítání, $\cdot$ jako násobení a f jako sinus.

Zadejte formuli $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{R} \models \varphi\,[e], \text{ právě když } e(x) = \pi.$$

Dokažte, že každá formule s touto vlastností musí obsahovat symbol $\cdot$.

Příklad 5
36 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, a, b, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
a, b, c	funkční	0

Uvažme teorii $T = \{P(a) \vee P(b),\ \ P(x) \to P(f(x)),\ \ f(f(x)) = c\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$.
Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.
Dále rozhodněte a dokažte, zda teorie T má model s nekonečným nosičem.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{Q\}$ s rovností, kde Q je binární predikátový symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$, jejíž modely jsou právě ty realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde $Q_{\mathcal{M}}$ je relace ekvivalence na nosiči M, která má:
a) právě dvě nekonečné třídy rozkladu;
b) právě dvě třídy rozkladu a obě jsou nekonečné.

Příklad 7
10 bodů

Nechť T je soubor formulí výrokové logiky a φ, ψ jsou libovolné formule. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí následující tvrzení:
a) Pokud $T \models \varphi \wedge \psi$, pak $T \models \varphi$ a $T \models \psi$.
b) Pokud $T \models \varphi \vee \psi$, pak $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$.

list 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Uvažme systém $\mathcal{L}(\neg, \vee)$ výrokové logiky, obsahující jen negaci a disjunkci.
Definujte, co je formule systému $\mathcal{L}$.
Definujte, co je valuace (výrokových proměnných).
Definujte rozšíření valuace z výrokových proměnných na všechny formule systému $\mathcal{L}$.

Příklad 2
8 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \emptyset$ s rovností. O každé z následujících formulí rozhodněte, ve kterých realizacích jazyka $\mathcal{L}$ platí (tj. např. v každé / v žádné / právě v těch s n-prvkovým nosičem (pro vhodné $n \in \mathbb{N}$) apod.):
a) $\forall x(x = x)$;
b) $\forall x \forall y(x = y)$;
c) $\forall x \exists y(x = y)$;
d) $\exists x \forall y(x = y)$.

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formulí φ_0, φ_1, φ_2 systému $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$ výrokové logiky takových, že všechny jsou vzájemně ekvivalentní, každá obsahuje právě jeden výskyt binární spojky, a to každá jiné spojky, a pro každé $i \in \{0, 1, 2\}$ formule φ_i obsahuje právě i výskytů negace.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot, P\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$+$	funkční	2
$\cdot$	funkční	2
P	predikátový	1

Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde:
nosičem je množina $\mathbb{Q}^+$ všech kladných racionálních čísel;
$+$ se realizuje jako sčítání;
$\cdot$ se realizuje jako násobení;
P se realizuje jako „je celé číslo", tj. $P_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}^+$.

Zadejte formuli $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$\mathcal{M} \models \varphi\,[e]$, právě když jmenovatel (základního tvaru) čísla $e(x)$ je roven šesti.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 5
36 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L}_1 = \{f\}$ a $\mathcal{L}_2 = \{f, P\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol a P je unární predikátový symbol. Uvažme následující teorii T jazyka $\mathcal{L}_2$:

$$T = \{\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall u (u = x \vee u = y \vee u = z)),\ \ P(x) \leftrightarrow \neg P(f(x))\}.$$

a) Dokažte, že teorie T není úplná.
b) Dejte příklad konečné teorie S jazyka $\mathcal{L}_1$ tak, aby teorie T byla jejím konzervativním rozšířením.
c) Je teorie S úplná? Správnost své odpovědi zdůvodněte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 6
26 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$, jejíž modely jsou právě ty realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde každé individuum má v zobrazení $f_{\mathcal{M}}$:

a) konečně mnoho vzorů;

b) nekonečně mnoho vzorů.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 7
30 bodů

Nechť T je teorie jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky, který obsahuje unární predikátový symbol P a konstantu c. Nechť $\mathcal{M}$ je kanonická struktura teorie T a označme M její nosič. Dále uvažme množinu $A = \{t \in M\colon\ T \nvdash \neg P(t)\}$. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že $A = P_{\mathcal{M}}$, pokud dále víme, že teorie T je:

a) bezesporná;
b) bezesporná a henkinovská;
c) úplná.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Definujte, co je jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky (bez rovnosti).
Definujte, co je realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$.

Příklad 2
10 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ bez rovnosti, kde P je binární predikátový symbol. Nechť pro formuli φ značí $\varphi_{x/y}$ formuli, která vznikne z φ nahrazením všech výskytů proměnné x proměnnou y. Dejte příklad realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a formule φ jazyka $\mathcal{L}$ takových, že x nemá vázaný výskyt ve φ a platí $\mathcal{M} \models \varphi$, ale $\mathcal{M} \not\models \varphi_{x/y}$.

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ, která je v disjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
38 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je binární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $2^{\mathbb{N}}$ všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a f se realizuje jako množinový rozdíl.

Rozhodněte a dokažte, zda existuje formule $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když:}$$

a) $e(x) = \emptyset$;
b) $e(x) = \{1\}$;
c) $|e(x)| = 2$.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
36 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.
Uvažme teorii $T = \{\forall x \exists y (x = f(y)),\ f(x) \neq x,\ f(f(x)) \neq x\}$ jazyka $\mathcal{L}$.

a) Pro každé $n \in \mathbb{N}^+$ dejte příklad formule φ_n jazyka $\mathcal{L}$ takové, že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models \varphi_n$, právě když nosič realizace $\mathcal{M}$ je právě n-prvkový.
b) Určete množinu $A = \{n \in \mathbb{N}^+ \colon \text{ teorie } T \cup \{\varphi_n\} \text{ je úplná}\}$.
c) Dokažte, že pro $n = \max A + 1$ teorie $T \cup \{\varphi_n\}$ není úplná.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 6
16 bodů

Rozhodněte a dokažte, zda systém $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$ výrokové logiky je plnohodnotný.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
30 bodů

Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk bez rovnosti obsahující unární predikátový symbol P a nulární funkční symbol c. Dále nechť φ, ψ jsou libovolné uzavřené formule jazyka $\mathcal{L}$. Označme $T_1 = \{\varphi\}$, $T_2 = \{\psi\}$ a $T = \{\varphi \vee \psi\}$ a dále nechť $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}$ jsou po řadě kanonické struktury teorií T_1, T_2, T. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že

a) $P_{\mathcal{M}} \subseteq P_{\mathcal{M}_1} \cup P_{\mathcal{M}_2}$;
b) $P_{\mathcal{M}} \supseteq P_{\mathcal{M}_1} \cup P_{\mathcal{M}_2}$;
c) $P_{\mathcal{M}} \subseteq P_{\mathcal{M}_1} \cap P_{\mathcal{M}_2}$;
d) $P_{\mathcal{M}} \supseteq P_{\mathcal{M}_1} \cap P_{\mathcal{M}_2}$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 1
20 bodů

Uvažujme Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky.
Uveďte odvozovací pravidlo modus ponens.
Definujte, co je důkaz formule (nemusíte uvádět, jak vypadají schémata axiomů).
Definujte, kdy je odvozovací systém korektní.
Definujte, kdy je odvozovací systém úplný.
Je Lukasiewiczův odvozovací systém korektní? Je úplný?

Příklad 2
10 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f, c\}$ s rovností, kde oba symboly jsou funkční s aritami po řadě 2 a 0. Uvažme realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde nosičem je množina $2^{\mathbb{N}}$ všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a f se realizuje jako sjednocení.

Ohodnocení e nazveme *pěkné*, právě když $e(v) = \emptyset$ pro každou proměnnou v různou od x a y (relevantní je tedy jen $e(x)$ a $e(y)$).

Stanovte $c_{\mathcal{M}}$ tak, aby pro právě **a)** 1; **b)** 2; **c)** 3 pěkná ohodnocení e platilo $\mathcal{M} \models f(x, y) = c\,[e]$; anebo konstatujte, že to není možné. V kladném případě uveďte i dotyčná ohodnocení.

Příklad 3
10 bodů

Nechť $|$ značí operátor NAND, tj. $\psi \,|\, \xi \approx \neg(\psi \wedge \xi)$. Dejte příklad formule φ, která je v konjunktivní normální formě a je ekvivalentní formuli $(A \,|\, B) \,|\, C$.

Příklad 4
32 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f, s, c\}$ s rovností, kde všechny symboly jsou funkční s aritami po řadě 1, 1, 0. Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když splňuje všechny tři následující podmínky:

nosičem je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ všech přirozených čísel;
s se realizuje jako následník (tj. přičtení jedničky);
c se realizuje jako 0.

Dejte příklad teorie T jazyka $\mathcal{L}$ takové, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models T, \text{ právě když pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí } f_{\mathcal{M}}(n) = 3n;$$

a navíc:
a) T je konečná;
b) T je konečná a žádná formule $\varphi \in T$ neobsahuje symbol c;
c) každá formule $\varphi \in T$ je uzavřená a atomická (tj. tvaru $t_1 = t_2$ pro vhodné termy t_1, t_2).

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
40 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ a $\mathcal{L}' = \{P, Q, c, d\}$ bez rovnosti, kde P, Q jsou unární predikátové symboly a c, d jsou konstanty. Dále uvažme teorie $S_1 = \{P(c),\ Q(c)\}$ a $S_2 = \{P(c),\ Q(d)\}$ nad jazykem $\mathcal{L}'$.

a) Rozhodněte a dokažte, zda teorie S_1 je rozšířením a zda je konservativním rozšířením teorie S_2.

b) Dejte příklad konečných teorií T_1 a T_2 jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby pro obě $i \in \{1, 2\}$ byla teorie S_i konzervativním rozšířením teorie T_i.

c) Rozhodněte a dokažte, zda teorie S_1 je rozšířením a zda je konzervativním rozšířením teorie T_2.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 6
24 bodů

Uvažujme následujících pět binárních spojek výrokové logiky: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$ ($\oplus$ je xor, tj. $v(\varphi \oplus \psi) = (v(\varphi) + v(\psi)) \bmod 2$). Vyberte z nich:
a) dvě, které spolu tvoří plnohodnotný systém;
b) čtyři, které spolu tvoří neplnohodnotný systém.
Správnost své volby dokažte. Můžete využít faktu, že systém $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$ je plnohodnotný. Plnohodnotnost jiných systémů nepředpokládejte.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
24 bodů

Nechť $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ je jazyk aritmetiky (s rovností) a $\mathcal{N}$ je jeho standardní realizace (tj. nosič je $\mathbb{N}$, symbol 0 se realizuje jako číslo 0, s jako následník, $+$ jako sčítání a $\cdot$ jako násobení). Zformulujte první Gödelovu větu o neúplnosti. Dále rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$ taková, že
a) T je konečná a úplná;
b) T je konečná a $\mathcal{N} \models T$;
c) T je úplná a $\mathcal{N} \models T$;
d) T je konečná, úplná a $\mathcal{N} \models T$.

list *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 1
20 bodů

Uvažujme Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky.
Uveďte odvozovací pravidlo modus ponens.
Definujte, co je důkaz formule (nemusíte uvádět, jak vypadají schémata axiomů).
Definujte, kdy je odvozovací systém korektní.
Definujte, kdy je odvozovací systém úplný.
Je Lukasiewiczův odvozovací systém korektní? Je úplný?

Příklad 2
14 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L} = \{Q\}$ a $\mathcal{L}' = \{Q, f, c\}$ bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
Q	predikátový	4
f	funkční	2
c	funkční	0

Zadejte nějakou konečnou teorii T jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby teorie $T' = \{Q(x, c, f(x, x), f(x, c))\}$ jazyka $\mathcal{L}'$ byla jejím konzervativním rozšířením.

Příklad 3
10 bodů

Najděte co nejkratší formuli φ systému $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli $\big(\neg\big(((A \vee B) \rightarrow C) \vee \neg A\big) \vee (\neg A \wedge C)\big)$.

Příklad 4
40 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{D, f\}$ bez rovnosti, kde D je binární predikátový symbol a f je unární funkční symbol. Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když splňuje obě následující podmínky:

nosičem je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ všech přirozených čísel;

D se realizuje jako dělitelnost, tj. $D_{\mathcal{M}} = \{(n, nk) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

Zadejte uzavřenou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí } f_{\mathcal{M}}(n) = n^2.$$

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
34 bodů

Uvažme jazyky $\mathcal{L}_1 = \{f\}$ a $\mathcal{L}_2 = \{f, g\}$ s rovností, kde oba symboly jsou unární funkční. Dále uvažme teorii

$$T = \{\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall u (u = x \vee u = y \vee u = z)),\ \ f(x) = f(y) \to x = y\}.$$

a) Intuitivně vysvětlete význam obou formulí.
b) Dokažte, že teorie T není úplná nad jazykem $\mathcal{L}_1$.
c) Dejte příklad formule ψ jazyka $\mathcal{L}_1$ tak, aby teorie $U = T \cup \{\psi\}$ byla úplná nad jazykem $\mathcal{L}_1$. Platí při vaší volbě formule ψ, že teorie $U \cup U_{f/g}$ je úplná nad jazykem $\mathcal{L}_2$? Lze zvolit formuli ψ i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Své odpovědi zdůvodněte.

(Značením $U_{f/g}$ rozumíme teorii, která vznikne z teorie U nahrazením všech výskytů symbolu f symbolem g ve všech jejích formulích.)

Příklad 6
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f, g\}$ s rovností, kde oba symboly jsou funkční s aritami po řadě 1 a 3. Nechť pro term t jazyka $\mathcal{L}$ značí $|t|$ jeho délku (tj. celkový počet znaků) a dále nechť $\#_f(t)$, resp. $\#_g(t)$ značí počet symbolů f, resp. g v termu t. Zformulujte všeobecně platnou závislost $|t|$ na $\#_f(t)$ a $\#_g(t)$ (tj. exaktně řečeno: najděte funkci $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takovou, že pro každý term t jazyka $\mathcal{L}$ platí $|t| = h(\#_f(t), \#_g(t))$). Dokažte tuto závislost strukturální indukcí.

list 5 učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
22 bodů

Nechť T je bezesporná teorie jazyka $\mathcal{L}$ bez rovnosti, který obsahuje unární predikátový symbol P a nulární funkční symbol (tj. konstantu) c. Dále nechť $\mathcal{M}$ značí kanonickou strukturu teorie T. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že

a) $T \models P(c) \Rightarrow \mathcal{M} \models P(c)$;
b) $\mathcal{M} \models P(c) \Rightarrow T \models P(c)$;
c) $T \models P(x) \Rightarrow \mathcal{M} \models P(x)$;
d) $\mathcal{M} \models P(x) \Rightarrow T \models P(x)$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky, jeho formule φ, realizace $\mathcal{M}$ a teorie T. O každém z následujících vztahů rozhodněte, zda má smysl, a pokud ano, definujte jej: $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \vdash \varphi$, $\mathcal{M} \vdash T$, $T \models \varphi$, $T \vdash \varphi$.
(Nemusíte uvádět definici důkazu ani Tarského definici sémantiky.)

Příklad 2
10 bodů

Nechť t je term, který je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, a u je term, který je substituovatelný za proměnnou y ve formuli φ. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že term u je substituovatelný za proměnnou y ve formuli $\varphi(x/t)$.

Příklad 3
10 bodů

Definice. Řekneme, že valuace v je *pěkná*, právě když $v(X) = 0$ pro každou výrokovou proměnnou X různou od A, B, C. (Existuje tedy právě 8 pěkných valuací.)
Dejte příklad co nejkratší formule φ systému $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \rightarrow)$ výrokové logiky, která je pravdivá při právě 5 pěkných valuacích.

Příklad 4
44 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$ s rovností, kde oba symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{Z}_6$ všech zbytkových tříd modulo 6, $+$ se realizuje jako sčítání a $\cdot$ jako násobení.

Definice. Řekneme, že formule $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *rozpoznávající* formule pro individuum $a \in \mathbb{Z}_6$, právě když pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models \varphi\,[e] \Leftrightarrow e(x) = a$.

a) Pro každé $a \in \mathbb{Z}_6$ dejte příklad jeho rozpoznávající formule.
b) Rozhodněte a dokažte, pro která $a \in \mathbb{Z}_6$ existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol $+$.
c) Rozhodněte a dokažte, pro která $a \in \mathbb{Z}_6$ existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol $\cdot$.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
34 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\sim, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
f	funkční	1
c	funkční	0

Uvažme teorii $T = \{f^{11}(c) = f(c),\ x \sim f^6(x),\ (x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$. Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dokažte, že do $\sim_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.

Příklad 6
24 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{Q\}$ bez rovnosti, kde Q je predikátový symbol arity 5. Nechť $k(\varphi)$, $i(\varphi)$ a $p(\varphi)$ značí po řadě počet kvantifikátorů, počet implikací a celkový počet výskytů proměnných ve formuli φ jazyka $\mathcal{L}$. Zformulujte všeobecně platnou závislost p na k a i (tj. exaktně řečeno: najděte funkci $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takovou, že pro každou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ platí $p(\varphi) = h(k(\varphi), i(\varphi))$). Dokažte tuto závislost strukturální indukcí.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 7
18 bodů

Nechť S je libovolný neprázdný soubor formulí výrokové logiky a φ formule taková, že $S \models \varphi$. Rozhodněte a dokažte, zda nutně existuje soubor $T \subseteq S$ takový, že $T \models \varphi$, a navíc:
a) T je konečný;
b) T je jednoprvkový.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 1
20 bodů

Dejte příklad plnohodnotného systému $\mathcal{L}$ spojek výrokové logiky.
Definujte abecedu výrokové logiky pro systém $\mathcal{L}$.
Definujte, co je formule systému $\mathcal{L}$ výrokové logiky.

Příklad 2
12 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f\}$ bez rovnosti, kde P je unární predikátový a f unární funkční symbol. Dále víme, že φ je formule jazyka $\mathcal{L}$. Vyberte pravdivá tvrzení:

a) Ve formuli φ se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol P.
b) Ve formuli φ se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol f.
c) Ve formuli φ se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol $\forall$.
d) Ve formuli φ se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol $\rightarrow$.
e) Ve formuli φ se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol $\Rightarrow$.
f) Ve formuli φ se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol pro proměnnou predikátové logiky.

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ, která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli $(A \rightarrow B) \rightarrow C$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{s, P\}$ s rovností, kde s je unární funkční symbol a P je unární predikátový symbol.
Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když platí obě následující podmínky:
nosičem je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ všech přirozených čísel;
s se realizuje jako následník (tj. přičtení jedničky).

Zadejte uzavřenou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } P_{\mathcal{M}} = \{n \in \mathbb{N}\colon\ 5 \mid n^2 - 1\} = \{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, \dots\}.$$

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
44 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}^+$ uvažme teorii $T_n = \{P(c), P(f^n(c)), (P(x) \leftrightarrow P(y)) \to x = y\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$. Označme $\mathcal{M}_n$ kanonickou strukturu teorie T_n. Rozhodněte a dokažte, pro která $n \in \mathbb{N}^+$ platí:
a) $\mathcal{M}_n \models P(x)$;
b) $T_n \models P(x)$.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 6
24 bodů

Nechť T, U jsou teorie jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky takové, že $T \subset U$. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že:

a) teorie T je rozšířením teorie U;
b) teorie U je rozšířením teorie T;
c) teorie T není rozšířením teorie U.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
20 bodů

Nechť $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ je jazyk aritmetiky (s rovností) a $\mathcal{N}$ je jeho standardní realizace (tj. nosič je $\mathbb{N}$, symbol 0 se realizuje jako číslo 0, s jako následník, $+$ jako sčítání a $\cdot$ jako násobení). Z přednášky známe teorii jazyka $\mathcal{L}$ zvanou Peanova aritmetika (PA). Připomeňme, že lze psát $PA = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, kde T_1 vynucuje chování s (je injektivní a nula nemá vzor), T_2 induktivně vynucuje chování $+$, T_3 induktivně vynucuje chování $\cdot$ a T_4 hovoří o principu matematické indukce.

a) Uveďte explicitně teorii T_4.
b) Zformulujte první Gödelovu větu o neúplnosti.
c) Rozhodněte a dokažte, zda pro každou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{N} \models \varphi \Rightarrow PA \vdash \varphi$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Definujte, co je jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky (bez rovnosti).
Definujte, co je realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$.

Příklad 2
16 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

Dále víme, že t je term jazyka $\mathcal{L}$ a u je uzavřený term jazyka $\mathcal{L}$. Vyberte pravdivá tvrzení:

a) V termu t se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol P.
b) V termu t se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol f.
c) V termu t se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol c.
d) V termu t se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol pro proměnnou predikátové logiky.
e) V termu u se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol $=$.
f) V termu u se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol f.
g) V termu u se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol c.
h) V termu u se musí / může a nemusí / nemůže vyskytovat symbol pro proměnnou predikátové logiky.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 3
10 bodů

Nechť $\curlywedge$ značí operátor NOR, tj. $\psi \curlywedge \xi \;\approx\; \neg(\psi \vee \xi)$. Dejte příklad formule φ systému $\mathcal{L}(\curlywedge)$ výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli $A \leftrightarrow B$.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, P\}$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol a P je unární predikátový symbol.
Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když platí obě následující podmínky:
nosičem je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ všech přirozených čísel;
$+$ se realizuje jako sčítání.

Zadejte uzavřenou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } P \text{ se realizuje jako „je mocnina dvojky“, tj. } P_{\mathcal{M}} = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 5
40 bodů

Jsou dány funkční symboly $\cdot$, f, c s aritami po řadě 2, 1, 0 a jazyky $\mathcal{L} = \{\cdot\}$, $\mathcal{L}' = \{\cdot, f, c\}$ s rovností. Dále uvažme formule

$$
\begin{aligned}
\varphi &\equiv \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x),\\
\psi_1 &\equiv \forall x \exists y (x \cdot y = x),\\
\psi_2 &\equiv \exists y \forall x (x \cdot y = x),\\
\psi_3 &\equiv \forall x (x \cdot c = x),\\
\psi_4 &\equiv \forall x (x \cdot f(x) = x),
\end{aligned}
$$

teorie $T_1 = \{\varphi, \psi_1\}$, $T_2 = \{\varphi, \psi_2\}$ jazyka $\mathcal{L}$ a teorie $T_3 = \{\varphi, \psi_3\}$, $T_4 = \{\varphi, \psi_4\}$ jazyka $\mathcal{L}'$. Pro každé $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ rozhodněte, zda teorie T_i

je konzervativním rozšířením / je nekonzervativním rozšířením / není rozšířením

teorie T_j. Pro $(i, j) = (3, 1)$ a $(i, j) = (3, 4)$ své odpovědi dokažte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
28 bodů

Uvažme systémy $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\wedge, \vee)$ a $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$ výrokové logiky.

Definice. Řekneme, že formule φ je $\mathcal{A}$-vyjádřitelná (resp. $\mathcal{B}$-vyjádřitelná), právě když existuje formule ψ systému $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) taková, že $\varphi \approx \psi$.

Dejte příklad formule φ (obsahující libovolné spojky výrokové logiky), která:
a) je $\mathcal{A}$-vyjádřitelná i $\mathcal{B}$-vyjádřitelná;
b) je $\mathcal{A}$-vyjádřitelná, ale není $\mathcal{B}$-vyjádřitelná;
c) není $\mathcal{A}$-vyjádřitelná, ale je $\mathcal{B}$-vyjádřitelná.

Dokažte správnost svých odpovědí.

Příklad 7
16 bodů

Definice. Teorie T, T' jazyka $\mathcal{L}$ se nazývají *sémanticky ekvivalentní* (resp. *sémanticky komplementární*), právě když pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T'$ (resp. $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models T'$).

Nechť T, T' jsou sémanticky komplementární teorie jazyka $\mathcal{L}$. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že existují konečné teorie U, U' jazyka $\mathcal{L}$ takové, že U je sémanticky ekvivalentní s T a U' je sémanticky ekvivalentní s T'.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	3
c	funkční	0

Definujte, co je term jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte realizaci $t^{\mathcal{M}}[e]$ termu t při ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Dejte příklad 3 uzavřených termů jazyka $\mathcal{L}$.

Příklad 2
12 bodů

Uveďte nějakou nejkratší vytvořující posloupnost formule $((A \to B) \vee (A \wedge \neg A))$.
Kolik nejkratších vytvořujících posloupností má tato formule?

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ tak, aby formule $(A \to B) \to \varphi$ a $A \to (B \to \varphi)$
a) byly ekvivalentní;
b) nebyly ekvivalentní.

Oblast strojově snímatelných informací, nezasahujte. ***Řešení pište jen na tuto stranu.***

Příklad 4
50 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot, c\}$ s rovností, kde oba symboly jsou funkční s aritami po řadě 2 a 0. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{N}^+$ všech kladných celých čísel, $\cdot$ se realizuje jako násobení a

a) $c_\mathcal{M} = 2$; **b)** $c_\mathcal{M} = 64$; **c)** $c_\mathcal{M} = 100$; **d)** $c_\mathcal{M} = 2500$.

Rozhodněte a dokažte, zda existuje formule $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když } e(x) \text{ je mocninou dvojky.}$$

Příklad 5
24 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\sqsubseteq\}$ s rovností, kde $\sqsubseteq$ je binární predikátový symbol. Dále uvažme formule

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv x \sqsubseteq x, \\
\varphi_2 &\equiv (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x) \rightarrow x = y, \\
\varphi_3 &\equiv (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \rightarrow x \sqsubseteq z, \\
\varphi_4 &\equiv \exists x \forall y (y \sqsubseteq x), \\
\varphi_{5a} &\equiv \exists x \forall y (x \sqsubseteq y), \\
\varphi_{5b} &\equiv \exists x \forall y (y \sqsubseteq x \rightarrow x = y)
\end{aligned}
$$

a teorie $A = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_{5a}\}$, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_{5b}\}$ jazyka $\mathcal{L}$.

a) Intuitivně vysvětlete význam jednotlivých formulí.

b) Dokažte, že teorie B není rozšířením teorie A.

Příklad 6
24 bodů

Definice. Nechť M je libovolná množina a $g\colon M \to M$. Prvek $a \in M$ nazveme *cyklickým* vzhledem ke g, právě když $a \in \{g^n(a) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$, jejíž modely jsou právě ty realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde:
a) každé individuum je cyklické vzhledem k $f_{\mathcal{M}}$;
b) žádné individuum není cyklické vzhledem k $f_{\mathcal{M}}$.

Příklad 7
20 bodů

Nechť T je bezesporná teorie jazyka $\mathcal{L}$ bez rovnosti, který obsahuje unární predikátový symbol P a nulární funkční symbol (tj. konstantu) c. Nechť $\mathcal{M}$ je kanonická struktura teorie T a označme M její nosič. Dále uvažme množinu $A = \{t \in M \colon T \nvdash \neg P(t)\}$. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že

a) $A \subseteq P_{\mathcal{M}}$;
b) $A \supseteq P_{\mathcal{M}}$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ bez rovnosti, kde P je unární predikátový symbol.
Definujte, co je formule φ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte indukcí vzhledem ke struktuře formule φ množinu $FV(\varphi)$ všech volných proměnných ve formuli φ.

Příklad 2
10 bodů

O každém z následujících systémů spojek výrokové logiky rozhodněte, zda je plnohodnotný:
a) $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$;
b) $\mathcal{L}(\neg, \leftrightarrow)$;
c) $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$;
d) $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \rightarrow)$;
e) $\mathcal{L}(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 3
10 bodů

Definice. Řekneme, že formule φ závisí na proměnné X, právě když existují valuace v, v' takové, že $v(Y) = v'(Y)$ pro všechny proměnnné Y různé od X, ale $v(\varphi) \neq v'(\varphi)$. Nechť $Z(\varphi)$ značí množinu právě těch proměnných, na kterých formule φ závisí.
Dejte příklad formulí φ, ψ, ξ takových, že $Z(\varphi) = \{A, B\}$, $Z(\psi) = \{A, C\}$, $Z(\xi) = \{B, C\}$ a $Z((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \xi) = \{B, C\}$.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{S}$, kde nosičem je množina $\mathbb{S}_4$ všech permutací čtyřprvkové množiny a $\cdot$ se realizuje jako skládání. (Připomeňme, že $\mathbb{S}_4$ sestává z identity, šesti 4-cyklů, osmi 3-cyklů, šesti 2-cyklů (transpozic) a tří 2-2-cyklů.)

Zadejte formuli $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{S} \models \varphi\,[e], \text{ právě když:}$$

a) $e(x)$ je identita;
b) $e(x)$ je 3-cyklus;
c) $e(x)$ je 4-cyklus;
d) $e(x)$ je 2-2-cyklus.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
40 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol a f je binární funkční symbol. Dále uvažme teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \exists x \exists y \exists z (x \neq y \land x \neq z \land y \neq z \land \forall u (u = x \lor u = y \lor u = z)),\\
\varphi_2 &\equiv \forall x \exists y \forall z (f(y, z) = x),\\
\varphi_3 &\equiv \forall x \forall y ((P(x) \land P(y)) \to x = y).
\end{aligned}$$

a) Pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$ dejte příklad realizace $\mathcal{M}_i$ jazyka $\mathcal{L}$ takové, že $\mathcal{M}_i \not\models T$, ale $\mathcal{M}_i \models T - \{\varphi_i\}$.
b) Dokažte, že teorie T není úplná.
c) Dejte příklad formule ψ jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby teorie $T \cup \{\psi\}$ byla úplná.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
20 bodů

Jsou dány teorie T_1, T_2 a formule φ. Označme $U_1 = T_1 \cup \{\varphi\}$, $U_2 = T_2 \cup \{\varphi\}$; přitom formuli φ i teorie T_1, T_2, U_1, U_2 uvažujeme nad stejným jazykem. Uvažme dále následující tvrzení:

Teorie T_1 je rozšířením teorie T_2. (1)

Teorie U_1 je rozšířením teorie U_2. (2)

Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že:

a) (1) $\Rightarrow$ (2);

b) (2) $\Rightarrow$ (1).

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 7
16 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ bez rovnosti, kde P je unární predikátový symbol. Najděte až na ekvivalenci všechny teorie jazyka $\mathcal{L}$. (Tedy exaktně řečeno: najděte $n \in \mathbb{N}$ a teorie $T_1, T_2, \ldots, T_n$ jazyka $\mathcal{L}$ takové, že každá teorie jazyka $\mathcal{L}$ je ekvivalentní právě jedné z teorií $T_1, T_2, \ldots, T_n$.)

Příklad 8
14 bodů

Nechť T je henkinovská teorie jazyka s rovností, která má aspoň jeden model s nekonečným nosičem. Dokažte, že T musí být nekonečná.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Definujte, co je jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky (bez rovnosti).
Definujte, co je realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$.

Příklad 2
14 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L} = \{Q\}$ a $\mathcal{L}' = \{Q, f, c\}$ bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
Q	predikátový	4
f	funkční	1
c	funkční	0

Zadejte nějakou konečnou teorii T jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby teorie $T' = \{Q(x, f(x), c, f(c))\}$ jazyka $\mathcal{L}'$ byla jejím konzervativním rozšířením.

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ, která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli $(A \leftrightarrow B) \to C$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 4
44 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot, f\}$ s rovností, kde všechny symboly jsou funkční s aritami po řadě 2, 2, 1. Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když platí všechny následující podmínky:

nosičem je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ všech přirozených čísel;
$+$ se realizuje jako sčítání;
$\cdot$ se realizuje jako násobení.

a) Zadejte uzavřenou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } f \text{ se realizuje jako Fibonacciho posloupnost, tj.}$$
$$f_{\mathcal{M}} = \{(0,0), (1,1), (2,1), (3,2), (4,3), (5,5), (6,8), (7,13), (8,21), (9,34), \dots\}.$$

b) Jako v **a)**, navíc φ nesmí obsahovat symbol $\cdot$.

c) Formulujte tvrzení o existenci a vlastnostech formule zvané Gödelův predikát β.

d) Zadejte formuli $\varphi(x, y)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ a každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když } e(x)\text{-té Fibonacciho číslo je } e(y).$$

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 5
36 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c, d\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0
d	funkční	0

Uvažme teorii $T = \{f^2(c) = c \vee f^3(d) = d,\ f^4(c) = f^5(d),\ P(f^6(c))\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$. Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
20 bodů

Uvažujme výrokovou logiku se spojkami $\neg$, $\rightarrow$ a Lukasiewiczovým odvozovacím systémem z přednášky. Nechť S označuje soubor všech formulí, které mají vytvořující posloupnost délky 3, ale nemají žádnou kratší. Rozhodněte a dokažte, zda:

a) $S \vdash (A \rightarrow B)$;

b) $S \models \neg A$.

Příklad 7
16 bodů

Nechť P, Q jsou unární predikátové symboly. Dejte příklad úplné teorie T_1 nad jazykem $\{P\}$ bez rovnosti a úplné teorie T_2 nad jazykem $\{Q\}$ bez rovnosti. Platí při vaší volbě teorií T_1 a T_2, že teorie $T = T_1 \cup T_2$ je úplná nad jazykem $\{P, Q\}$ bez rovnosti? Lze zvolit teorie T_1 a T_2 i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Své odpovědi zdůvodněte.

list učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Dejte příklad plnohodnotného systému $\mathcal{L}$ spojek výrokové logiky.
Definujte abecedu výrokové logiky pro systém $\mathcal{L}$.
Definujte, co je formule systému $\mathcal{L}$ výrokové logiky.

Příklad 2
12 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ bez rovnosti, kde P je binární predikátový symbol. O každém z následujících předpisů rozhodněte, zda korektně zadává teorii jazyka $\mathcal{L}$. Pokud ne, vysvětlete, v čem je problém.

a) $\{\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i) \mid n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$;

b) $\{\exists n \exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i)\}$;

c) $\{\exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$;

d) $\{\exists x_0 \exists x_1 \cdots \bigwedge_{i \in \mathbb{N}^+} P(x_{i-1}, x_i)\}$.

Příklad 3
10 bodů

Definice. Řekneme, že valuace v je *pěkná*, právě když $v(X) = 0$ pro každou výrokovou proměnnou X různou od A, B, C. (Existuje tedy právě 8 pěkných valuací.)
Dejte příklad formule φ systému $\mathcal{L}(\wedge, \rightarrow)$ výrokové logiky, která je pravdivá při právě 3 pěkných valuacích.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
36 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$ s rovností, kde oba symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{Z}_4$ všech zbytkových tříd modulo 4, $+$ se realizuje jako sčítání a $\cdot$ jako násobení.

Definice. Řekneme, že formule $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *rozpoznávající* formule pro individuum $a \in \mathbb{Z}_4$, právě když pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models \varphi\,[e] \Leftrightarrow e(x) = a$.

a) Pro každé $a \in \mathbb{Z}_4$ dejte příklad jeho rozpoznávající formule.
b) Rozhodněte a dokažte, pro která $a \in \mathbb{Z}_4$ existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol $+$.
c) Rozhodněte a dokažte, pro která $a \in \mathbb{Z}_4$ existuje rozpoznávající formule neobsahující symbol $\cdot$.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 5
30 bodů

Nechť T_1 a T_2 jsou teorie nad stejným jazykem, přičemž T_1 je úplná a T_2 je jejím rozšířením. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že teorie T_2

a) je bezesporná;

b) není úplná;

c) je sporná nebo úplná.

Příklad 6
52 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\sim, f, g, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
f	funkční	1
g	funkční	1
c	funkční	0

Uvažme teorii $T = \{x \sim f(x),\ f(g(x)) = x,\ g(f(x)) = x\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$.

a) Dejte příklad modelu $\mathcal{M}$ teorie T takového, že $\mathcal{M} \not\models f(c) = c$.
b) Pro každý uzavřený term t jazyka $\mathcal{L}$ určete jeho realizaci $t^{\mathcal{M}}$ ve zvoleném modelu $\mathcal{M}$.
c) Jak se realizuje symbol $\sim$ v kanonické struktuře teorie T?
Dokažte správnost svých odpovědí.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 1
20 bodů

Uvažme systém $\mathcal{L}(\neg, \vee)$ výrokové logiky, obsahující jen negaci a disjunkci.
Definujte, co je formule systému $\mathcal{L}$.
Definujte, co je valuace (výrokových proměnných).
Definujte rozšíření valuace z výrokových proměnných na všechny formule systému $\mathcal{L}$.

Příklad 2
10 bodů

Víme, že P je predikátový symbol a f, g jsou funkční symboly. O každém z následujících výrazů rozhodněte, zda se může jednat o term, a pokud ano, napište pro něj nějakou vytvořující posloupnost:
a) x;
b) $P(x, f(x))$;
c) $f(x, f(x))$;
d) $g(x, f(x), f(f(x)))$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
10 bodů

Najděte co nejkratší formuli φ systému $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$ výrokové logiky, která je ekvivalentní formuli $\big(((\neg B \rightarrow \neg A) \wedge C) \vee \neg((A \wedge \neg B) \vee C)\big)$.

Příklad 4
30 bodů

Nechť $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ označuje množinu všech přirozených čísel. Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\oplus, t\}$ s rovností, kde $\oplus$ je binární funkční a t unární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ všech (nekonečných) posloupností přirozených čísel, $\oplus$ se realizuje jako sčítání po složkách (tj. $(a_0, a_1, a_2, \dots) \oplus_{\mathcal{M}} (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$) a t se realizuje jako tail (tj. $t_{\mathcal{M}}((a_0, a_1, a_2, \dots)) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$).

Zadejte formuli $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když:}$$

a) $e(x)$ je neklesající;
b) $e(x) = (1, 0, 0, 0, \dots)$;
c) $e(x)$ je rostoucí.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
40 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$, jejíž modely jsou právě realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$, kde množina $P_{\mathcal{M}}$:

a) má méně než 10 prvků;
b) má méně než 10 prvků nebo je nekonečná;
c) má více než 10 prvků, ale konečně mnoho;
d) má více než 10 prvků.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

Uvažme teorii

$$T = \{f^4(c) = c,\ \neg P(c),\ \bigvee_{i=1}^{3} P(f^i(c)),\ \forall x\big(P(f(x)) \to \big(P(x) \vee P(f(f(x)))\big)\big)\}$$

nad jazykem $\mathcal{L}$. Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde nosičem je množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel, $f_{\mathcal{M}}(n) = n + 1$ pro každé nezáporné $n \in \mathbb{Z}$ a $f_{\mathcal{M}}(n) = n + 2$ pro každé záporné $n \in \mathbb{Z}$. Rozhodněte a dokažte, pro která $n \in \mathbb{Z}$ existuje formule $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{M} \models \varphi\,[e]$, právě když $e(x) = n$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol.
Definujte, co je realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$.
Definujte sémantiku formulí φ jazyka $\mathcal{L}$, tj. kdy platí $\mathcal{M} \models \varphi\,[e]$.

Příklad 2
10 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L} = \{Q\}$ a $\mathcal{L}' = \{Q, f, c\}$ bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
Q	predikátový	3
f	funkční	1
c	funkční	0

Zadejte nějakou konečnou teorii T jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby teorie $T' = \{Q(x, f(x), c)\}$ jazyka $\mathcal{L}'$ byla jejím konzervativním rozšířením.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ tak, aby formule $(\varphi \to A) \to B$ a $\varphi \to (A \to B)$
a) byly ekvivalentní;
b) nebyly ekvivalentní.

Příklad 4
40 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot, s, f\}$ s rovností, kde všechny symboly jsou funkční s aritami po řadě 2, 1, 1.
Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když platí všechny následující podmínky:
nosičem je množina $\mathbb{N}^+$ všech kladných celých čísel;
$\cdot$ se realizuje jako násobení;
s se realizuje jako následník (tj. přičtení jedničky).

Zadejte uzavřenou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když pro každé } n \in \mathbb{N}^+ \text{ je } f_{\mathcal{M}}(n) \text{ rovno počtu dělitelů čísla } n.$$

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
40 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L} = \{P, f\}$ a $\mathcal{L}' = \{P, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

Dále uvažme formule

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \left(\bigwedge_{i=1}^{4} \bigwedge_{j=i+1}^{4} x_i \neq x_j \ \wedge\ \forall y \left(\bigvee_{i=1}^{4} y = x_i \right) \right), \\
\varphi_2 &\equiv \forall x \exists y (f(y) = x), \\
\varphi_3 &\equiv \exists x (f^6(x) \neq x), \\
\varphi_4 &\equiv \exists x \exists y \big(x \neq y \ \wedge\ \forall z (P(z) \leftrightarrow (z = x \vee z = y)) \big)
\end{aligned}$$

a teorii $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$.

a) Intuitivně vysvětlete význam jednotlivých formulí.

b) Dokažte, že teorie T není úplná.

c) Najděte formuli ψ jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby teorie $T \cup \{\psi\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$ byla úplná. Platí při vaší volbě formule ψ, že teorie $T \cup \{\psi, P(c)\}$ nad jazykem $\mathcal{L}'$ je úplná? Lze zvolit formuli ψ i tak, aby odpověď na předchozí otázku byla opačná? Své odpovědi zdůvodněte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\sim, X, Y, f, c\}$ bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
X	predikátový	0
Y	predikátový	0
f	funkční	1
c	funkční	0

Uvažme teorii $T = \{X \vee Y,\ X \leftrightarrow c \sim x,\ Y \leftrightarrow x \sim c\}$ jazyka $\mathcal{L}$. Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. O každé uzavřené atomické formuli jazyka $\mathcal{L}$, která je podle vás pravdivá v $\mathcal{M}$, dokažte, že tomu tak skutečně je.

Příklad 7
10 bodů

Nechť T je soubor formulí výrokové logiky a φ, ψ jsou libovolné formule. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí následující tvrzení:

a) Pokud $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, pak $T \models \varphi \vee \psi$.

b) Pokud $T \models \varphi \vee \psi$, pak $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Uvažujme Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky.
Uveďte odvozovací pravidlo modus ponens.
Definujte, co je důkaz formule (nemusíte uvádět, jak vypadají schémata axiomů).
Definujte, kdy je odvozovací systém korektní.
Definujte, kdy je odvozovací systém úplný.
Je Lukasiewiczův odvozovací systém korektní? Je úplný?

Příklad 2
10 bodů

Nechť P je binární predikátový symbol a f je unární funkční symbol. O každé z následujících formulí rozhodněte, zda je v ní term $f(y)$ substituovatelný za proměnnou x, a pokud ano, uveďte výslednou formuli po substituci:
a) $P(x, y)$;
b) $\forall y\, P(x, y)$;
c) $\forall x \forall y\, P(x, y)$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ, která je v disjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$ s rovností, kde oba symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{C}$, kde nosičem je množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel, $+$ se realizuje jako sčítání a $\cdot$ jako násobení.

Zadejte formuli $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$\mathcal{C} \models \varphi\,[e]$, právě když obrazy čísel $e(x_1)$, $e(x_2)$, $e(x_3)$, $e(x_4)$ v Gaussově rovině leží ve vrcholech čtverce.

(Nápověda: můžete nejprve vynutit $\{e(x_1), e(x_2), e(x_3), e(x_4)\} = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.)

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
30 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L} = \{P\}$ a $\mathcal{L}' = \{P, c\}$ bez rovnosti, kde P je binární predikátový symbol a c je nulární funkční symbol (konstanta).
Dále uvažme teorii $T_1 = \{\forall x \exists y\, P(x, y)\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$, teorii $T_2 = \{\exists y \forall x\, P(x, y)\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$ a teorii $T_3 = \{\forall x\, P(x, c)\}$ nad jazykem $\mathcal{L}'$. Pro každé $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ rozhodněte, zda teorie T_i

je konzervativním rozšířením / je nekonzervativním rozšířením / není rozšířením

teorie T_j. Pro $(i, j) = (2, 1)$ svou odpověď dokažte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\sim, f, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$\sim$	predikátový	2
f	funkční	1
c	funkční	0

a) Dejte příklad realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ takové, že platí obě následující podmínky:
pro nekonečně mnoho uzavřených termů t jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models t \sim f(t)$;
pro nekonečně mnoho uzavřených termů t jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \not\models t \sim f(t)$.

b) Rozhodněte a dokažte, zda taková realizace $\mathcal{M}$ může splňovat $\mathcal{M} \models x = y \leftrightarrow x \sim y$.

Příklad 7
16 bodů

Nechť A, B jsou unární predikátové symboly. V níže uvedených formulích nahraďte každý výskyt písmene Q všeobecným nebo existenčním kvantifikátorem (různé výskyty můžou být nahrazeny různými kvantifikátory) tak, aby ekvivalence formulí byla splněna; anebo konstatujte, že to není možné.

a) $Qx(A(x) \wedge B(x)) \ \approx\ Qx\, A(x) \wedge Qx\, B(x)$;
b) $Qx(A(x) \vee B(x)) \ \approx\ Qx\, A(x) \vee Qx\, B(x)$;
c) $Qx(A(x) \to B(x)) \ \approx\ Qx\, A(x) \to Qx\, B(x)$;
d) $Qx(A(x) \leftrightarrow B(x)) \ \approx\ Qx\, A(x) \leftrightarrow Qx\, B(x)$.

Příklad 8
24 bodů

Nechť $\mathcal{L} = \{0, s, +, \cdot\}$ je jazyk aritmetiky (s rovností) a $\mathcal{N}$ je jeho standardní realizace (tj. nosič je $\mathbb{N}$, symbol 0 se realizuje jako číslo 0, s jako následník, $+$ jako sčítání a $\cdot$ jako násobení). Zformulujte první Gödelovu větu o neúplnosti. Dále rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T jazyka $\mathcal{L}$ taková, že

a) T je konečná a úplná;
b) T je konečná a $\mathcal{N} \models T$;
c) T je úplná a $\mathcal{N} \models T$;
d) T je konečná, úplná a $\mathcal{N} \models T$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky, jeho formule φ, realizace $\mathcal{M}$ a teorie T. O každém z následujících vztahů rozhodněte, zda má smysl, a pokud ano, definujte jej: $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \vdash \varphi$, $\mathcal{M} \vdash T$, $T \models \varphi$, $T \vdash \varphi$.
(Nemusíte uvádět definici důkazu ani Tarského definici sémantiky.)

Příklad 2
10 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L} = \{P\}$ a $\mathcal{L}' = \{P, Q\}$ bez rovnosti, kde P, Q jsou unární predikátové symboly. Zadejte nějakou konečnou teorii T jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby teorie $T' = \{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(P(x) \to \neg Q(x))\}$ jazyka $\mathcal{L}'$ byla jejím konzervativním rozšířením.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
10 bodů

Nechť $\not\rightarrow$ je binární spojka se sémantikou $\varphi \not\rightarrow \psi \approx \neg(\varphi \to \psi)$, $\bullet$ je unární spojka se sémantikou $\bullet\varphi \approx \varphi \to \varphi$ a $\circ$ je unární spojka se sémantikou $\circ\varphi \approx \neg(\varphi \to \varphi)$. Dejte příklad formule φ logického systému $\mathcal{L}(\not\rightarrow, \bullet, \circ)$, která je ekvivalentní formuli $A \vee B$.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{s, P\}$ s rovností, kde s je unární funkční symbol a P je unární predikátový symbol.

Realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ nazveme *pěknou*, právě když platí obě následující podmínky:
- nosičem je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ všech přirozených čísel;
- s se realizuje jako následník (tj. přičtení jedničky).

Zadejte uzavřenou formuli φ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každou pěknou realizaci $\mathcal{M}$ platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } P \text{ se realizuje jako „je násobek tří“, tj. } P_{\mathcal{M}} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
30 bodů

Definice. Teorie T, T' jazyka $\mathcal{L}$ se nazývají *sémanticky ekvivalentní*, právě když pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T'$.

Rozhodněte a dokažte, zda:
a) ke každé teorii existuje konečná teorie, která je s ní sémanticky ekvivalentní;
b) ke každé konečné teorii existuje jednoprvková teorie, která je s ní sémanticky ekvivalentní.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c, d\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	2
c	funkční	0
d	funkční	0

Uvažme teorii $T = \{f(x,y) = f(y,x),\ f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z)),\ P(f(f(c,c),d))\}$ jazyka $\mathcal{L}$. Jak se realizuje symbol P v kanonické struktuře $\mathcal{M}$ teorie T? Dokažte správnost své odpovědi.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
10 bodů

Nechť S, T jsou splnitelné soubory formulí výrokové logiky. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že soubor $S \cup T$ je:
a) splnitelný;
b) nesplnitelný.

Příklad 8
20 bodů

Formulujte větu o dedukci pro Lukasiewiczův odvozovací systém z přednášky. Dejte příklad vlastního odvozovacího systému (rovněž pro systém $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$), který je korektní a pro nějž platí právě jedna z (meta)implikací věty o dedukci. Zdůvodněte správnost vaší volby.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol.
Definujte, co je realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$.
Definujte, kdy platí $\mathcal{M} \models P(x)\,[e]$.
Definujte, kdy platí $\mathcal{M} \models x = y\,[e]$.

Příklad 2
10 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, c\}$ bez rovnosti; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
c	funkční	0

Dejte příklad realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ takové, že pro právě 3 uzavřené termy t jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models P(t)$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
10 bodů

Nechť $\circ$ je unární spojka odpovídající „konstantní nepravdě“, tj. $\circ\varphi \approx \neg(\varphi \to \varphi)$. Dejte příklad formule φ logického systému $\mathcal{L}(\to, \circ)$, která je ekvivalentní formuli $A \wedge B$.

Příklad 4
36 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$ s rovností, kde oba mimologické symboly jsou binární funkční. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{R}$, kde nosičem je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, $+$ se realizuje jako sčítání a $\cdot$ jako násobení.

Zadejte formuli $\varphi(x, y, z)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{R} \models \varphi\,[e], \text{ právě když } e(x), e(y), e(z) \text{ jsou délky stran nějakého trojúhelníku.}$$

Dokažte, že každá formule s touto vlastností musí obsahovat symbol $\cdot$.

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
40 bodů

Jsou dány jazyky $\mathcal{L}_1 = \{\cdot, n\}, \mathcal{L}_2 = \{\cdot, n, f\}, \mathcal{L}_3 = \{\cdot, n, f, p\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$\cdot$	funkční	2
n	funkční	0
f	funkční	1
p	funkční	0

Uvažme formule $\varphi \equiv x \cdot y = y \cdot x \wedge (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \wedge x \cdot n = x$, $\psi \equiv x \cdot f(x) = n$, $\xi \equiv f(p) = p$ a teorie $T_1 = \{\varphi\}$ nad jazykem $\mathcal{L}_1$, $T_2 = \{\varphi, \psi\}$ nad jazykem $\mathcal{L}_2$ a $T_3 = \{\varphi, \psi, \xi\}$ nad jazykem $\mathcal{L}_3$.

Rozhodněte a dokažte, zda

a) teorie T_2 je rozšířením teorie T_1;
b) teorie T_2 je konzervativním rozšířením teorie T_1;
c) teorie T_3 je konzervativním rozšířením teorie T_2;
d) teorie T_2 je konzervativním rozšířením teorie T_3.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
24 bodů

Uvažme výrokovou logiku se spojkami $\neg$, $\to$ a Lukasiewiczovým odvozovacím systémem z přednášky. Nechť S označuje soubor všech splnitelných formulí. Rozhodněte a dokažte, zda

a) $S \vdash A \to B$;
b) $S \models \neg(A \to A)$;
c) lze soubor S rozdělit na soubory S_1, S_2 (tj. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ a $S_1 \cup S_2 = S$) tak, že oba dva soubory S_1, S_2 jsou splnitelné.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
20 bodů

Zformulujte nutnou a postačující podmínku $(*)$ pro jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky, aby mělo smysl uvažovat kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T nad jazykem $\mathcal{L}$ (tj. aby $\mathcal{M}$ měla neprázdný nosič).
Dále rozhodněte a dokažte, zda pro kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ každé **úplné** teorie T nad každým jazykem $\mathcal{L}$ bez rovnosti, který splňuje podmínku $(*)$, platí, že $\mathcal{M}$ je modelem teorie T.

list *učo* ***body***

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, g, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
g	funkční	2
c	funkční	0

Definujte, co je term jazyka $\mathcal{L}$.
Definujte, co je realizace $t^{\mathcal{M}}[e]$ termu t při ohodnocení e v realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.
Dejte příklad 3 uzavřených termů jazyka $\mathcal{L}$.

Příklad 2
10 bodů

Nechť S, T jsou nesplnitelné soubory formulí výrokové logiky. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že je nesplnitelný i soubor
a) $S \cap T$;
b) $S \cup T$.

Příklad 3
10 bodů

Nechť $\mathcal{V}$ označuje soubor všech proměnných výrokové logiky. Valuaci v nazveme *pěknou*, právě když $v(X) = 0$ pro všechny $X \in \mathcal{V} - \{A, B, C\}$ (existuje tedy právě 8 pěkných valuací). Dejte příklad formule φ logického systému $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$, která je pravdivá při právě 5 pěkných valuacích.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot, c, P\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
$\cdot$	funkční	2
c	funkční	0
P	predikátový	1

Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde:

nosičem je množina $\mathbb{Q}^+$ všech kladných racionálních čísel;
$\cdot$ se realizuje jako násobení, tj. $\cdot_\mathcal{M} = \{((x, y), xy) \mid x, y \in \mathbb{Q}^+\}$;
c se realizuje jako osmička, tj. $c_\mathcal{M} = 8$;
P se realizuje jako „je celé číslo“, tj. $P_\mathcal{M} = \mathbb{N}^+$.

Zadejte formuli $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$\mathcal{M} \models \varphi\,[e]$, právě když jmenovatel čísla $e(x)$ (v základním tvaru) je sudý.

list 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 5
40 bodů

Nechť P je binární predikátový symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje splnitelná teorie T, která má jen modely s nekonečným nosičem, a navíc:
a) T je nad jazykem $\{P\}$ s rovností;
b) T je konečná a nad jazykem $\{P\}$ s rovností;
c) T je nad jazykem $\{P\}$ bez rovnosti;
d) T je konečná a nad jazykem $\{P\}$ bez rovnosti.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 6
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{a, b, c, P, X, Y\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
a, b, c	funkční	0
P	predikátový	1
X, Y	predikátový	0

Uvažme formule $\varphi_1 \equiv X \vee Y$, $\varphi_2 \equiv X \leftrightarrow (P(a) \wedge P(b))$, $\varphi_3 \equiv Y \leftrightarrow (P(a) \wedge P(c))$, $\varphi_4 \equiv x = y$ a teorie $T_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, $T_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$.
Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}_1$ teorie T_1 a kanonickou strukturu $\mathcal{M}_2$ teorie T_2.
Rozhodněte, zda $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$, $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$, $\mathcal{M}_1 \models \varphi_3$, $\mathcal{M}_2 \models \varphi_1$, $\mathcal{M}_2 \models \varphi_2$, $\mathcal{M}_2 \models \varphi_3$, $\mathcal{M}_2 \models \varphi_4$.

0007 *list* 5 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
30 bodů

Nechť T_1 je teorie nad jazykem $\mathcal{L}_1$ bez rovnosti a T_2 je teorie nad jazykem $\mathcal{L}_2$ bez rovnosti, přičemž T_1 je úplná a T_2 je jejím konzervativním rozšířením. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že T_2 je úplná, pokud dále víme, že

a) $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$;
b) $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 1
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky, jeho formule φ, realizace $\mathcal{M}$ a teorie T. O každém z následujících vztahů rozhodněte, zda má smysl, a pokud ano, definujte jej: $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \vdash \varphi$, $\mathcal{M} \vdash T$, $T \models \varphi$, $T \vdash \varphi$.
(Nemusíte uvádět definici důkazu ani Tarského definici sémantiky.)

Příklad 2
10 bodů

Nechť S je soubor formulí výrokové logiky, který má nekonečně mnoho splnitelných podsouborů. Rozhodněte a dokažte, zda nutně platí, že S je splnitelný.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
10 bodů

Dejte příklad formule φ, která je v konjunktivní normální formě a která je ekvivalentní formuli $(A \to B) \to C$.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\subset\}$ bez rovnosti, kde $\subset$ je binární predikátový symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde:

nosičem je množina $2^{\mathbb{N}}$ všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel;
$\subset$ se realizuje jako ostrá množinová inkluze.

Zadejte formuli $\varphi(x, y)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když množiny } e(x),\, e(y) \text{ jsou navzájem svými komplementy.}$$

Příklad 5
40 bodů

Nechť f je unární a c nulární funkční symbol. Uvažme teorii
$T = \{\forall x \exists y (f(y) = x),\ \forall x (f(x) \neq x),\ \exists x (f^5(x) \neq x),\ \psi\}$, kde

$$\psi \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \left(\bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=i+1}^{5} x_i \neq x_j \wedge \forall y \left(\bigvee_{i=1}^{5} y = x_i \right) \right).$$

a) Intuitivně vysvětlete význam jednotlivých formulí.
b) Dokažte, že teorie T není úplná nad jazykem $\{f, c\}$ (s rovností).
c) Je tato teorie úplná nad jazykem $\{f\}$ (s rovností)? Svou odpověď zdůvodněte.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
20 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f, g\}$, kde oba symboly jsou funkční s aritami po řadě 1 a 3. Nechť $p_c(t)$, $p_f(t)$ a $p_g(t)$ označují po řadě počet čárek, počet symbolů f a počet symbolů g v termu t jazyka $\mathcal{L}$. Zformulujte všeobecně platnou závislost p_c na p_f a p_g (tj. exaktně řečeno: najděte funkci $h\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takovou, že pro každý term t jazyka $\mathcal{L}$ platí $p_c(t) = h(p_f(t), p_g(t))$). Dokažte tuto závislost strukturální indukcí.

Příklad 7
14 bodů

Definice. Formule ξ jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky se nazývá *tautologie*, právě když $\mathcal{M} \models \xi$ pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ bez rovnosti, kde P je binární predikátový symbol, a dále je dána formule $\psi \equiv \forall x \exists y\, P(x, y)$. Dejte příklad formule φ jazyka $\mathcal{L}$ takové, že formule ψ je sémantickým důsledkem teorie $\{\varphi\}$, ale $\varphi \to \psi$ není tautologie. Dokažte, že při vaší volbě formule φ skutečně platí, že $\varphi \to \psi$ není tautologie.

Příklad 8
16 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{c\}$ s rovností, kde c je nulární funkční symbol (konstanta). Dokažte, že teorie $T = \emptyset$ nad jazykem $\mathcal{L}$ není henkinovská. Dejte příklad splnitelné henkinovské teorie nad jazykem $\mathcal{L}$.

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
20 bodů

Uvažme systém $\mathcal{L}(\neg, \wedge)$ výrokové logiky, obsahující jen negaci a konjunkci.
Definujte, co je formule systému $\mathcal{L}$.
Definujte, co je valuace (výrokových proměnných).
Definujte rozšíření valuace z výrokových proměnných na všechny formule systému $\mathcal{L}$.

Příklad 2
10 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{A, B, C, D, E\}$ bez rovnosti. O každém z jeho mimologických symbolů určete, jakého je typu (predikátový/funkční) a jakou má aritu, víte-li, že $(A(B, C(x, D(y)), z) \rightarrow E)$ je formule jazyka $\mathcal{L}$.

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3
10 bodů

Nechť $\curlywedge$ značí operátor NOR, tj. $\psi \curlywedge \xi \;\approx\; \neg(\psi \vee \xi)$. Dejte příklad formule φ logického systému $\mathcal{L}(\curlywedge)$, která je ekvivalentní formuli $A \to B$.

Příklad 4
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol. Uvažme jeho realizaci $\mathcal{M}$, kde:

nosičem je množina $\{a, b\}^+$ všech neprázdných slov nad abecedou $\{a, b\}$;
$\cdot$ se realizuje jako zřetězení.

Zadejte formuli $\varphi(x)$ jazyka $\mathcal{L}$ takovou, že pro každé ohodnocení e platí

$$\mathcal{M} \models \varphi\,[e], \text{ právě když slovo } e(x) \text{ začíná a končí na stejné písmeno.}$$

list 3 učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
30 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je binární predikátový symbol. Dále jsou dány forumle φ, ψ, ξ, ζ a teorie T_1, T_2, T_3 nad jazykem $\mathcal{L}$:

$$
\begin{array}{lcll}
\varphi & \equiv & \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) & \\
\psi & \equiv & \forall x \forall y\, P(x,y) & T_1 = \{\varphi, \psi\} \\
\xi & \equiv & \forall x \exists y\, P(x,y) & T_2 = \{\varphi, \xi, \neg\zeta\} \\
\zeta & \equiv & \exists y \forall x\, P(x,y) & T_3 = \{\varphi, \neg\xi, \zeta\}
\end{array}
$$

O každé z teorií T_1, T_2, T_3 rozhodněte a dokažte, zda je splnitelná.

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
36 bodů

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{P, f, g, c\}$ s rovností; mimologické symboly popisuje tabulka:

symbol	typ	arita
P	predikátový	1
f	funkční	1
g	funkční	1
c	funkční	0

Uvažme teorii $T = \{P(c), \quad \forall x(P(x) \leftrightarrow P(f(f(x)))), \quad \forall x(f(g(x)) = x), \quad \forall x(g(f(x)) = x)\} \cup \cup \{\forall x(f^n(x) \neq x) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ nad jazykem $\mathcal{L}$. Popište kanonickou strukturu $\mathcal{M}$ teorie T. Dbejte přitom též na precizní popis nosiče. Dokažte, že do $P_{\mathcal{M}}$ nepatří nic víc, než tvrdíte.

list 5 učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 7
24 bodů

Definice. *Obrazem* zobrazení $g\colon A \to B$ rozumíme množinu $\{g(a) \mid a \in A\}$.

Je dán jazyk $\mathcal{L} = \{f\}$ s rovností, kde f je unární funkční symbol. Rozhodněte a dokažte, zda existuje teorie T nad jazykem $\mathcal{L}$ taková, že pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathcal{M} \models T, \text{ právě když obraz zobrazení } f_{\mathcal{M}} \text{ je}$$

a) konečný;
b) nekonečný.