Zadání 1. cvičení, podzim 2019

Na cvičení nestihnete spočítat úplně všechno, ale většinu byste projít měli.

Příklad. 1. *Řešte systémy nerovnic, nakreslete si příslušné oblasti v rovině.*
(a)

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq \frac{1}{x}$$

(b)

$$y \leq \arctan x, \quad y \leq \frac{1}{x^2}$$

(c)

$$x^2 + (y-1)^2 \geq 4, \quad y + x^2 - 2x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Poznámka. U nerovnice $f(x,y) \geq 0$ se soustřeďte se na vymezení hranic oblastí v rovině pomocí rovnice $f(x,y) = 0$. Uvnitř každé z nich pak pro spojitou f máte stejné znaménko hodnot.

Příklad. 2. *Určete definiční obor funkce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

a)

$$\frac{xy}{y(x^3 + x^2 + x + 1)},$$

b)

$$\ln(x^2 - y^2),$$

c)

$$\ln(-x^2 - y^2),$$

d)

$$\arcsin(2\chi_{\mathbb{Q}}(x)),$$

kde $\chi_{\mathbb{Q}}$ je charakteristická funce množiny racionálních čísel,

e)

$$f(x,y,z) = \sqrt{\ln x \cdot \arcsin(y^2 z)}.$$

Poznámka. Definiční obor by měl být součástí každé definice funkce. Pro "týrání" studentů se ale často místo toho napíše výraz a zkoumá se, jaký je "maximální" definiční obor, kde má tento výraz smysl.

Příklad. 3. *Vrstevnice funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou množiny bodů $f^{-1}(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = c\}$ pro $c \in \mathbb{R}$. Je to řez grafu funkce rovinou $z = c$ v $\mathbb{R}^3$. Pomocí vrstevnic a řezů jinými rovinami (např. $y = kx$) zjistěte, jak vypadají grafy následujících funkcí $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. *(Kužel s vrcholem v počátku.)*
b) $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$. *("Obrácený" paraboloid s vrcholem v bodě $(0,0,2)$.)*
c) $f(x,y) = x^2 - y^2$. *("Sedlo", hyperbolický paraboloid.)*
d) $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$. *(Pozor na definiční obor.)*

Při počítání limit funkcí více proměnných nemáme k dispozici mnoho nástrojů (jako např. L'Hospitalovo pravidlo). Platí ale pravidlo, že limita existuje, jen když pro jakoukoliv posloupnost argumentů konvergujících k příslušnému hromadnému bodu definičního oboru je limita hodnot funkce v nich vždy tatáž (a zejména tedy existuje). Neexistence se tak většinou snadno dokáže tak, že v různých směrech přibližování dostáváme různé limity. Je také často vhodné změnit systém souřadnic.

Připomeňte, že spojitost znamená existence limity, která je rovna hodnotě funkce v daném bodě. Vyberte si několik z následujících příkladů.

Příklad. 4. *Zjistěte, zda existují tyto limity a pokud ano, čemu se rovnají:*

a) $\lim_{(x,y)\to(e^2,1)} \frac{\ln x}{y}$. *(Limita existuje a je rovná 2.)*

b) $\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$. *(Faktorizací jmenovatele zjistíme, že je to $\frac{1}{4}$.)*

c) $\lim_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y}$. *(Limita je 0.)*

d) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x}$. *(Rozšiřte zlomek a použijte substituci $t = xy$ (tj. počítáme s $t \to 0$), vyjde 2.)*

e) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$,. *(Zkuste v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, $(x,y) \to (\infty,\infty)$, tj. $r \to \infty, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Místo počítání můžete využít toho, že spojitá funkce $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi$ na uzavřeném intervalu nabývá svého minima, které musí být kladné. Vyjde limita rovna 0.)*

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$. *(Použijte křivky $y = x$ a $y = 1 - \mathrm{e}^x$, na nich máme různé limity – limita neexistuje.)*

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. *(V polárních souřadnicích se snadno vidí, že limita neexistuje.)*

h) $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{2x+xy-y-2}{x^2+y^2-2x+4y+5}$, *(Přímky bodem $[1,-2]$ jsou $y = k(x-1) - 2$ a podél nich dostáváme různé limity – limita neexistuje.)*

Příklad. 5. *Najděte body nespojitosti následujících funkcí:*

a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2-1}$. *(Definiční obor je $\mathbb{R}^2$ bez kružnice o poloměru 1 se středem v počátku. Tedy v definičním oboru žádné body nespojitosti nejsou. Lze funkci spojitě dodefinovat v některých bodech kružnice? V úvahu připadají jen body $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$, neboť v nich $x - y = 0$. Zjistěte, zda v nich existuje limita.)*

b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

(Funkce je spojitá ve všech bodech.)