Zadání 2. cvičení, podzim 2019

Ve druhém cvičení budete zkoumat tečny ke křivkám v rovině či prostoru a počítat lineární přiblížení (derivace a diferenciál) funcí více proměnných.

Křivka $c(t)$ je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tj. $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$. Derivace křivky v bodě t je dána vektorem $c'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))$. Tečna ke křivce $c(t)$ je proto v bodě t_0 dána parametricky jako $T: \ x(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0)$.

Příklad. 1. *Určete tečnu křivky dané předpisem* $c(t) = (\ln t, \operatorname{arctg} t, \mathrm{e}^{\sin \pi t})$ *v bodě* $t_0 = 1$.

Příklad. 2. *Na křivce* $c(t) = (t^2 - 1, -2t^2 + 5t, t - 5)$ *najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou* $\rho : 3x + y - z + 7 = 0$.
(Směrový vektor tečny ke křivce c(t) v bodě chceme mít kolmý k normálovému vektoru roviny ρ, takže skalární součin těchto dvou vektorů musí být roven 0.)

Pro funkci dvou proměnných je diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ lineární zobrazení vektoru $v = (x - x_0, y - y_0)$

$$d_v f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.

Příklad. 3. *Přímo i pomocí parciálních derviací vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x, y) = x^3 + 4xy$ *v bodě* $[2, -1]$ *ve směru vektoru* $(1, 3)$. *V tomto bodě vyjádřete rovněž diferenciál funkce* f *jako lineární zobrazení.*

Příklad. 4. *S využitím parciálních derivací vyjádřete diferenciál* df *funkce* $\operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ *v bodě* $[1, -1]$ *a vypočtěte pomocí něho směrovou derivaci pro směr* $u = (1, 2)$.

Pomocí diferenciálu najdeme tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ jako graf afinní funkce $z(x, y)$:

$$z(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

(což je rovina daná jako graf diferenciálu posunutý do bodu odpovídajícímu hodnotě funkce). V okolí bodu dotyku tečné roviny můžeme přibližně vypočítat funkční hodnoty.

Příklad. 5. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\sqrt{2,98^2 + 4,05^2}$. (Použijte diferenciál vhodné funkce v bodě $[3, 4]$.)

Příklad. 6. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\operatorname{arctg} \frac{1{,}02}{0{,}95}$.

Příklad. 7. *Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce* $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$ *v bodě* $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, ?]$.

Příklad. 8. (Určeno pro MB203.) *Najděte diferenciál zobrazení* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz)$ *v bodě* $[1, 2, 3]$ *jako lineární zobrazení* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.