Zadání 3. cvičení, podzim 2019

Toto cvičení je zaměřeno na vyšší parciání derivace, Taylorův rozvoj a určování lokálních extrémů funkcí více proměnných. Postup je hodně podobný jako u jedné proměnné: (1) stacionární body, (2) přiblížení druhého řádu v těchto bodech - Hessián, (3) rozhodování o extrému, obvykle použitím Sylvestrova kritéria.

Pokud je determinant Hessiánu nenulový, vždy umíme určit, zda je ve stacionárním bodě maximum, minimum nebo v něm žádný extrém není. U znamének hlavních minorů $+, +, \ldots, +$ jde o minimum, $-, +, -, \ldots, \pm$ odpovídá maximu, jinak jde o sedlový bod.

Příklad. 1. *Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce* $f(x, y) = x^4y + xy^2 + x + 2$ *v bodě* $[1, 1]$.

Příklad. 2. *Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte* $\sqrt{2,98^2 + 4,05^2}$ *(O kolik jsme lepší než jen s diferenciálem? Viz předchozí cvičení.)*

Příklad. 3. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
(Stacionární body $[0, 0]$ a $[1, 1]$, v prvním není extrém, ve druhém lokální minimum.)

Příklad. 4. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ *v prvním oktantu (tj. všechny tři souřadnice jsou nezáporné).*
(Jediný stacionární bod $[1/2, 1, 1]$, je to minimium.)

Příklad. 5. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.
(Vyjdou tři stacionární body $[0, 0]$, $[1, 1]$, $[-1, -1]$, v prvním neumíme rozhodnout podle Hessiánu, další dva jsou minima. V počátku extrém nenastane – v okolí jsou kladné i záporné hodnoty.)

Příklad. 6. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ *na celém jejím definičním oboru.*
(Definiční obor je celé $\mathbb{R}^2$, kromě počátku. Stacionárních bodů je osm: $[0, \pm 1]$, $[\pm 1, 0]$, $[\pm 1/\sqrt{2\,\mathrm{e}}, \pm 1/\sqrt{2\,\mathrm{e}}]$, v prvních čtyřech není extrém, v dalších jsou dvě minima a dvě maxima.)