Zadání 4. cvičení, podzim 2019

Nechť $F(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, dále $F(x_0,y_0) = 0$ a $F_y(x_0,y_0) \neq 0$. Pak existuje spojitě diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu x_0, přičemž $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Funkce $y = f(x)$ je tedy rovností $F(x,y) = 0$ implicitně definovaná v okolí bodu x_0. Pokud $F_y(x_0,y_0) = 0$, funkce f se zmíněnými vlastnostmi nemusí, ale může (!!) existovat (např. $y^3 - x = 0$).

Podobné tvrzení platí pro funkce více proměnných, např. pro 3 proměnné:
Nechť $F(x,y,z)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0,y_0,z_0]$, dále $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ a $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Pak existuje spojitě diferencovatelná funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu $[x_0,y_0]$, přičemž $F(x,y,f(x,y)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Pokud $F_z(x_0,y_0,z_0) = 0$, funkce f nemusí, ale může (!!) existovat.

Z příkladů si zvolte alespoň jeden ze všech typů (např. 1, 5, 7, 9, 13 a případně 13 a 11).

Příklad. 1. *Určete první a druhou derivaci implicitně zadané funkce $y = f(x)$ splňující $x^2 + y^2 = 1$. Najděte její lokální extrémy.*
(Po zderivování obou stran máme $2x + 2yy' = 0$, z toho $y' = -\frac{x}{y}$. První rovnost je ekvivalentní s rovností $x + yy' = 0$, po zderivování dostaneme $1 + (y')^2 + yy'' = 0$. Tedy

$$y'' = -\frac{1+(y')^2}{y} = -\frac{1+x^2/y^2}{y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

Extrémy jsou pro $x = 0$ maximum nebo minimum, podle toho, kterou volíme větev řešení. Nakreslete si obrázek.)

Příklad. 2. *Určete derivaci implicitní funkce $y(x)$, pokud $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.*
($y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.)

Příklad. 3. *Určete derivaci implicitní funkce, pokud $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.*
($y' = \frac{x\cos(x^2)}{y\sin(y^2)}$.)

Příklad. 4. *Nechť je funkce $y(x)$ dána v okolí bodu $[1,1]$ implicitně rovnicí $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. Určete $y'(1)$ a $y''(1)$.*
($y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.)

Příklad. 5. *Rozhodněte, zda křivka $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1,-1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.*
(Křivku v okolí bodu $[1,-1]$ považujte za graf funkce $y(x)$ zadané implicitně, odpovězte podle hodnoty druhé derivace této funkce v daném bodě.
$y''(1) = 16 > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.)

Příklad. 6. *Rozhodněte, zda křivka $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ leží v okolí bodu $[1,3]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.*
($y''(1) = \frac{15}{9} > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.)

Příklad. 7. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě $[1,\sqrt{2},2]$ funkce $z = f(x,y)$ definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$.*
($z_x(1,\sqrt{2}) = \frac{z-2x}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z_y(1,\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}z-2y}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z_{xx}(1,\sqrt{2}) = z_{yy}(1,\sqrt{2}) = -2$, $z_{xy}(1,\sqrt{2}) = 0$.)

Příklad. 8. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě* $[-2, 0, 1]$ *funkce* $z = f(x, y)$ *definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí* $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.
($z_x(-2, 0) = -\frac{4x+8z}{8x+2z-1} = 0$, $z_y(-2, 0) = -\frac{4y}{8x+2z-1} = 0$, $z_{xx}(-2, 0) = z_{yy}(-2, 0) = \frac{4}{15}$, $z_{xy}(-2, 0) = 0$.)

Příklad. 9. *V okolí kterých bodů křivky* $F(x, y) = x^2+2xy-y^2-8 = 0$ *nelze vyjádřit* y *jako funkci* $y = f(x)$*?*
(Body, kde $f(x, y) = 0$ a $F_y(x, y) = 0$ jsou $[2, 2], [-2, -2]$. V nich vezměme implicitní funkci $x = x(y)$. Spočtěte její první a druhou derivaci. Z výpočtu vidíte, že tečna křivky v těchto bodech je rovnoběžná s osou y a křivka leží vlevo nebo vpravo od této tečny. Tedy není ji možno vyjádřit y jako funkci x. Namalujte si obrázek.)

Příklad. 10. *V okolí kterých bodů parabolické válcové plochy* $z^2 - 2px = 0$*, kde* $p > 0$*, nelze vyjádřit* z *jako funkci* $z = f(x, y)$*?*
(Podezřelé body jsou ty, kde $F_z(x, y, z) = 0$. To je celá osa y. Nyní stačí pracovat v rovinách $y =$ konst stejně jako v předchozím příkladu. Všechny body osy y. Instruktivní je namalovat obrázek.)

Příklad. 11. *V okolí kterých bodů jednodílného hyperboloidu* h *o rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nelze vyjádřit z *jako funkci* $z = f(x, y)$*?*
(Najdeme podezřelé body. Ty tvoří elipsu v rovině x, y. Představte si, jak hyperboloid vypadá a kde je tato elipsa. Z této představy je vidět, že v okolí bodů elipsy není z funkcí x, y. Dokážete to tak, že v okolí bodu $(x_0, y_0, 0)$ na elipse, leží na hyperboloidu s s každým bodem (x, y, z) i bod $(x, y, -z)$.)

Na množině M implicitně zadané jednou rovnicí $F = 0$ lze přímočaře hledat extrémy jiné funkce h. Gradient funkce h pak musí být násobkem gradientu funkce h, pokud je druhý gradient nenulový.

Příklad. 12. *Najděte extrémy funkce* $h(x, y) = x-y$ *na elipse* $F(x, y) = x^2+2y^2-6 = 0$ *v rovině* $\mathbb{R}^2$.
(Extrém musí nastat ve stacionárním bodě, ty musí mít vlastnost, že gradient h je násobkem gradientu F. Vyjdou body $[x, y]$ s $x = \pm 2$, $y = - \pm 1$, jedno minimum, jedno maximum. Tuto skutečnost dokážeme pomocí tvrzení, že spojitá funkce nabývá na uzavřené a omezené podmnožině v $\mathbb{R}^n$ svého maxima i minima.)

Příklad. 13. *Najděte extrémy funkce* $h(x, y, z) = x+2y+3z$ *za podmínky* $F(x, y, z) = xyz = 36$ *a* $x > 0$, $y > 0$ *a* $z > 0$.
(Stacionární bod je $(6, 3, 2)$ a jde o minimum. To dokážeme například tak, že vypočteme x jako funkci (y, z) z $F(x, y, z) = 0$, dosadíme do h a spočteme Hessián modifikované funkce v $(3, 2)$.)