Zadání 5. cvičení, podzim 2019

Pokud lze množinu $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zadat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici (např. $x \in \langle a, b\rangle$) umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in \langle \varphi(x), \psi(x)\rangle$, pak

$$\iint_S f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x.$$

Příklad. 1. *Vypočtěte* $\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle -1,2\rangle} (x^2+2xy)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.
Řešení: $\frac{5}{2}$.

Příklad. 2. *Vypočtěte* $\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,3\rangle} [3(x-1)^2+(y-2)^2+2]\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.
Řešení: 12.

Příklad. 3. *Vypočtěte* $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (2-xy)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$.
Řešení: $\frac{7}{24}$.

Příklad. 4. *Vypočtěte* $\int_0^1 \int_0^{\pi} (x\sin y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$.
Řešení: 1.

Příklad. 5. *Vypočtěte* $\int_3^4 \int_x^{2x} \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$.
Nápověda: po nějaké době rozložte na parciální zlomky.
Řešení: $3\ln 2 - \ln 3$.

Příklad. 6. *Zaměňte pořadí integrace:* $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$.
Řešení: $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

Příklad. 7. *Zaměňte pořadí integrace:* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$.
Řešení: $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.

Příklad. 8. *Spočítejte* $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.
Nápověda: Protože integrál $\int \sin x^2\,\mathrm{d}\,x$ neumíme vypočítat, zaměňte nejdříve pořadí integrace a pak výsledný integrál spočítejte pomocí substituce $t = x^2$.
Řešení: $\frac{1}{6}$.

Příklad. 9. *Spočítejte* $I = \iint_M 8y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, *kde* $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, xy \geq 1, x+y \leq \frac{5}{2}\}$.
Nápověda: $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 8y\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$.
Řešení: $\frac{9}{2}$.

Příklad. 10. *Spočítejte* $\iint_S xy^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, *kde S je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.*
Řešení: $\frac{1}{40}$.

Příklad. 11. *Spočítejte* $\iint_A x^3 y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, *kde A je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^3$.*
Řešení: $\frac{1}{30}$.