Zadání 8. cvičení, podzim 2019

Procvičte řešení obyčejných diferenciálních rovnic: se separovanými proměnnými (příklady 1 a 2), lineární rovnice (příklad 3) a homogenní diferenciální rovnice (příklad 4). Při dostatku času spočtěte i příklad na Bernouliovu rovnici (příklad 5). Nechte studenty rozhodnout o definičních oborech funkcí, které jsou řešením s danou počáteční podmínkou, případně načrtnout jejich graf.

Příklad 1. *Řešte rovnici* $(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x$. *Najděte obecné řešení a řešení splňující počáteční podmínku* $y(0) = 1$.

Příklad 2. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y^2+1}{x+1}$. *Najděte obecné řešení.*

Příklad 3. *Řešte rovnici* $y' = x - \frac{2y}{x^2-1}$. *Najděte obecné řešení, řešení splňující počáteční podmínku* $y(0) = -1$ *a řešení splňující počáteční podmínku* $y(2) = 3$.

Nápověda. Vyřeště prvně homogenní lineární rovnici $y' = -\frac{2y}{x^2-1}$ a pak hledejte partikulární řešení původní úlohy pomocí variace konstant, tj. ve tvaru $C(x)z(x)$, kde $z(x)$ je řešení homogenní úlohy.

Příklad 4. *Řešte rovnici* $xy' + y \ln x = y \ln y$. *Zjistěte ve které oblasti roviny má rovnice smysl. Najděte obecné řešení a řešení splňující počáteční podmínku* $y(1) = 1$.

Příklad 5. *Řešte rovnici* $y' = \frac{y}{x} + y^2 \sin x$. *Najděte obecné řešení a řešení splňující počáteční podmínku* $y(1) = 4$.

Výsledek. $y = 0,\ \frac{1}{y} = \frac{c}{x} + \cos x - \frac{\sin x}{x}$.