

ZADÁNÍ 11. CVIČENÍ, PODZIM 2019  
NÁHODNÉ VEKTORY

Potřebné pojmy k řešení příkladů jsou:

- Nezávislost náhodných veličin, náhodný vektor, marginální a sdružené pravděpodobnostní funkce, hustoty a distribuční funkce.

**Příklad 1.** Diskrétní náhodný vektor má sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou

$X \backslash Y$	2	5	6
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

Určete

- marginální distribuční a pravděpodobnostní funkce;
- sdruženou distribuční funkci a vhodným způsobem ji znázorněte;
- $P(Y > 3X)$ .

Výsledek.  $\frac{3}{20}$ .

**Příklad 2.** Určete distribuční funkci náhodného vektoru  $(X, Y)$ , jehož hustota je

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(4x - y) & \text{pro } 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete dále  $P(Y > 2X)$ .

Výsledek.  $\frac{1}{3}$ .

**Příklad 3.** Určete marginální distribuční funkce, sdruženou a marginální hustotu náhodného vektoru  $(X, Y)$ , je-li

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \text{ nebo } y < 0 \\ \frac{1}{4}x^2y^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & \text{pro } x > 1, y > 2 \\ x^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, y > 2 \\ \frac{y^2}{4} & \text{pro } x > 1, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

**Příklad 4.** Určete hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru  $(X, Y)$ , jehož distribuční funkce je

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -1 \\ \frac{1}{\pi^2}(\arcsin x + \frac{1}{2})(\arctg y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } |x| < 1 \\ \frac{1}{\pi}(\arctg y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Určete rovněž marginální hustoty a rozhodněte, jsou-li veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé.

Výsledek.  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ , kde  $f_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$  pro  $-1 < x < 1$ , jinak 0, a  $f_2(x) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ . Jsou nezávislé.

**Příklad 5.** V urně je 14 kuliček – 4 červené, 5 bílých a 5 modrých. Náhodně bez vracení vybereme 6 kuliček. Určete rozložení náhodného vektoru  $(X, Y)$ , označuje-li  $X$  počet tažených červených kuliček a  $Y$  počet tažených bílých kuliček. Určete rovněž marginální rozložení veličin  $X$  a  $Y$ . Dále vypočítejte  $P(X \leq 3), P(1 \leq Y \leq 4)$ .

**Příklad 6.** *Hustota náhodného vektoru  $(X, Y, Z)$  je*

$$f(x, y, z) = \begin{cases} c(x + y + z) & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

*Určete konstantu  $c$ , distribuční funkci a vypočtěte  $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{3}, 0 \leq Z \leq \frac{1}{4})$ .*

*Výsledek.  $c = \frac{2}{3}$ ,  $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{3}, 0 \leq Z \leq \frac{1}{4}) = \frac{5}{48}$ .*