

Cvičenie 7.

Príklad 1. Určite lokálne extrémny funkcie $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množine $M : x + y - 4 = 0$.

Riešenie. Bod $[2, 2]$ je lokálne maximum.

Príklad 2. Určite lokálne extrémny funkcie $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množine $M : x^2 + y^2 = z$.

Riešenie. Bod $[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}]$ je lokálne minimum.

Príklad 3. Určite lokálne extrémny funkcie $f(x, y) = xy$ na množine $M : |x| + |y| = 1$.

Riešenie. Body $[\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$ sú lokálne minimum a body $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$ sú lokálne maximum.

Príklad 4. Určite lokálne extrémny funkcie $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ na množine $M : x^2 + y^2 = 4$.

Riešenie. Body $[0, \pm 2]$ sú lokálne maximum a body $[\pm 2, 0]$ sú lokálne minimum.

Príklad 5. Spočítajte

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz,$$

kde Ω je vymezená rovinami $x = 0, y = 0, z = 0$ a $x + y + z = 2$.

Riešenie. $\frac{8}{15}$.

Príklad 6. Spočítajte

$$\iiint_{\Omega} 2y dx dy dz,$$

kde Ω je útvar v prvom oktante a vymezený rovinami $x^2 + z^2 + 1 = y^2$ a $x + z = 1$.

Riešenie. $\frac{2}{3}$.

Príklad 7. Určite ťažisko časti roviny ležiacej v prvom kvadrante, vnútri elipsy $3x^2 + y^2 = 2$ a pod priamkou $y = \sqrt{3}x$.

Riešenie. $S = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, T = \left[\frac{8\sqrt{3}}{9\pi}, \frac{8(\sqrt{2}-1)}{3\pi} \right]$.

Príklad 8. Určite súradnice ťažiska T kruhovej dosky $x^2 + y^2 \leq a^2$ pre $a > 0$, ak je jej hustota v danom bode priamo úmerná vzdialenosti tohto bodu od bodu $[a, 0]$.

Riešenie. $M = \frac{32ca^3}{9}, T = [-\frac{a}{5}, 0]$.