$\boxed{2C}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = 2y^2x - yx + 2x^2$ Určite lokálne extrémy.

$f'_x = 2y^2 - y + 4x = 0$ ← dosadíme

$f'_y = 4yx - x = 0 \Rightarrow x\cdot(4y-1) \Rightarrow x = 0 \vee y = 1/4$

Riešené 2D
$f_{2C}(x,y) = f_{2D}(y,x)$ stačí zameniť súradnice

A. $x = 0$

$2y^2 - y = 0$

$y(2y-1) = 0$

$y = 0 \vee y = 1/2$

$y = 1/4$

$2\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 4x = 0 \quad /\cdot 16$

$2 - 4 + 4\cdot 16x = 0$

$4\cdot 16x = 2$

$x = \frac{1}{32}$

$P_1 = [0,0]$

$P_2 = [0, 1/2]$

$P_3 = [1/32, 1/4]$

$f''_{xx} = 4$

$f''_{xy} = 4y - 1$

$f''_{yy} = 4x$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} \underset{>0}{4} & 4y-1 \\ 4y-1 & 4x \end{pmatrix}$ $\det H(x,y) = 16x - (4y-1)^2$

$\det H(P_1) = -1 < 0$ nie je extrém

$\det H(P_2) = -1 < 0$ – " –

$\det H(P_3) = \frac{1}{2} > 0 \quad \wedge \quad f''_{xx}(P_3) > 0$ (alebo $f''_{yy} = 4\cdot\frac{1}{32} > 0$) a teda lok. minimum je v P_3.

Obmedzme sa na $M = \{(x,y) \mid 8x = y\}$. Iste $P_3 \in M$, preto P_3 je lokálne minimum f na M. Ostatné extrémy f na M sú v stac. bodoch f a vieme, že $P_2 \notin M$. Zostáva overiť P_1.

A. Dosadíme $y = 8x$ do $f(x,y)$:

$f(x, 8x) = 2\cdot 64x^3 - 8x^2 + 2x^2 = 2\cdot 64x^3 - 6x^2$

$f'_x = 6\cdot 64x^2 - 12x = 0$

$f''_{xx} = 6\cdot 64\cdot 2x - 12$ $\quad f''_{xx}(0) = \boxed{-12} < 0$ lok. minim v $(0,0)$ funkcie f na M.

B. Lagrangeove multiplikátory. Máme $F(x,y) = 8x - y$

Musí platiť $F'_x(P_1)h_1 + F'_y(P_1)\cdot h_2 = 0$ $\quad F'_x = 8,\ F'_y = -1$

$8h_1 - h_2 = 0 \Rightarrow \underline{h_2 = 8h_1}$

nie je náhoda

$D^2_{(h_1,h_2)}(x,y) = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 4 & 4y-1 \\ 4y-1 & 4x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$D^2_{(h_1,8h_1)}(0,0) = (h_1, 8h_1)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ 8h_1 \end{pmatrix} = (h_1\ 8h_1)\begin{pmatrix} -4h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix} = -4h_1^2 - 8h_1^2 = \boxed{-12}h_1^2$

v $(0,0)$ je lokálne maximum.

neg. def. kvadratická forma

2A

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 3y^2x - yx + x^2$ Určite lokálne extrémy.

$f'_x = 3y^2 - y + 2x = 0$ ← dosadíme

$f'_y = 6yx - x = 0 = x(6y-1) \Rightarrow x = 0 \vee y = 1/6$

A. $x = 0$

$3y^2 - y = 0$

$y(3y-1) = 0$

$y = 0 \vee y = 1/3$

$P_1 = [0,0]$

$P_2 = [0, 1/3]$

B. $y = 1/6$

$3 \cdot \frac{1}{36} - \frac{1}{6} + 2x = 0 \; / 36$

$3 - 6 + 2 \cdot 36x = 0$

$2 \cdot 36x = 3$

$2 \cdot 12x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{24}}$

$P_3 = [1/24, 1/6]$

riešenie 2B: stačí použiť transformáciu $(x', y') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, lebo $\boxed{f_{2A}(x,y) = f_{2B}(y,x)}$

$f''_{xx} = 2$

$f''_{xy} = 6y - 1$

$f''_{yy} = 6x$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} \overset{>0}{2} & 6y-1 \\ 6y-1 & 6x \end{pmatrix}$ $\quad \det H(x,y) = 12x - (6y-1)^2$

$\det H(P_1) = -1 < 0$ nie je extrém

$\det H(P_2) = -1 < 0$ — $\shortparallel$ —

$\det H(P_3) = \frac{12}{24} > 0$ + $f_{xx} > 0$ (príp. $6 \cdot \frac{1}{24} > 0$) tj. lokálne minimum.

Označme $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x = y\}$. Určite lokálne extrémy f na M.

Z predošlého je P_3 iste lokálne minimum M, pretože $\overset{4 \cdot x}{4 \cdot \frac{1}{24}} = \frac{1}{6} = y$. nejaký (obmedzenie M spôsobuje, že sa obmedzíme iba na ~~obmedzíme~~ ~~nejaký~~ špeciálny rez rovinou $4x = y$)

Ostatné lokálne extrémy môžu byť iba niektorom stacionárnom bode z predošlej úlohy..

Zostane skúsiť iba $[0,0]$, $P_2 \notin M$.

Dosadenie $y = 4x$ do $f(x,y)$:

$f(x, 4x) = 3 \cdot 16 x^3 - 4x^2 + x^2 = 48x^3 - 3x^2$

$f'_x = 48 \cdot 3 \cdot x^2 - 6x$. $f'(0) = 0$

$f''_{xx} = 48 \cdot 3 \cdot 2x - 6$ $\quad f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow [0,0]$ je lokálne ~~minimum~~ maximum f na M.

alebo:

Metóda Lagrangeových multiplikátorov:

Máme $F'_x(P_1) \cdot h_1 + F'_y(P_1) \cdot h_2 = 0$ $\quad F(x,y) = 4x - y$

$4h_1 - h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = 4h_1$ $\quad F'_x = 4, \; F'_y = -1$

nie je náhoda

$D^2_{(h_1,h_2)}(x,y) = (h_1, h_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6y-1 \\ 6y-1 & 6x \end{pmatrix}}_{H(x,y)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \underset{(x,y) = [0,0]}{\overset{(h_1,h_2) = (h_1, 4h_1)}{=}} (h_1, 4h_1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ 4h_1 \end{pmatrix} = (h_1, 4h_1) \begin{pmatrix} -2h_1 \\ -h_1 \end{pmatrix}$

$= -2h_1^2 - 4h_1^2 = -6h_1^2 \leq 0$ neg. definitná kvad. forma

lok. maximum