Pr1 tzv. Monty Hall problem.

Pr2 Uvažujme hru s mincou, kde pst hlavy je $p \in (0,1)$ a orla $q = 1-p$.

Ak padne hlava (H), hráč získa 1 kč, ak padne orol hráč prehrá 1 kč.

Nech $S_0 = k$ je počiatočné vlastníctvo hráča. Hráč chce kúpiť auto v hodnote N. Bude hrať tak dlho, dokým $S_n = N$ alebo $S_n = 0$ (bankrot)

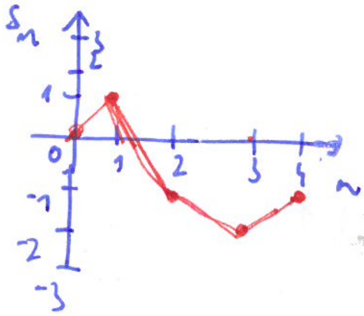
Aká je pst, že hráč zbankrotuje?

Máme $S_n = S_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\text{„skoro ako binomické rozdelenie"}}$, kde $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = q$ $\forall i \in \mathbb{N}$

X_i sú nezávislé

náhodný proces = postupnosť náhodných veličín

(Nazýva sa Náhodná prechádzka.)



Definujme javy:

A = hráč zbankrotuje

H = padne hlava

O = padne orol

$P_0(A) = 1$

$P_N(A) = 0$

Veta o úplnej pst:

$$P(A) = P(A|H)\cdot P(H) + P(A|O)\cdot P(O)$$

Metóda podmienenia 1. kroku:

$$(p+q)\cdot P_k(A) = P_{k+1}(A)\cdot \overset{p}{P(H)} + P_{k-1}(A)\cdot \overset{q}{P(O)}$$

$$p\cdot(P_k(A) - P_{k+1}(A)) = q(P_{k-1}(A) - P_k(A))$$

$$\frac{p}{q} = \frac{-P_{k-1}(A) + P_k(A)}{-P_k(A) + P_{k+1}(A)}$$

$P_k(A)$ = pst bankrotu, ak hráč má počiatočné vlastníctvo k

$$P_\ell(A) = \sum_{i=0}^{\ell-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i (P_1(A) - \overset{1}{P_0(A)}) + \overset{1}{P_0(A)}$$

$\boxed{q/p < 1}$ pre $q \neq p \neq \frac{1}{2}$

$$P_\ell(A) - P_0(A) = P_\ell(A) - P_{\ell-1}(A) + P_{\ell-1}(A) - P_{\ell-2}(A) + \dots + P_1(A) - P_0(A).$$

$\boxed{\ell = N:}$

$$0 = P_N(A) = \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i (P_1(A) - 1) + 1$$

$$\frac{-1}{P_1(A) - 1} = \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}{\frac{q}{p} - 1}$$

$$\boxed{P_1(A) - 1 = \frac{-q/p + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}}$$

$$P_\ell(A) = \frac{1 - q/p}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}\cdot\frac{1 - (q/p)^\ell}{1 - q/p} + 1 = \frac{1 - (q/p)^\ell}{(q/p)^N - 1} + 1 = \frac{(q/p)^N - (q/p)^\ell}{(q/p)^N - 1}$$

$q = p = 1/2$

$$1 = \frac{P_k(A) - P_{k-1}(A)}{P_{k+1}(A) - P_k(A)} \to \text{konštantná diferencia}$$

aritmetická postupnosť

$$P_\ell(A) = P_0(A) + \ell\cdot(P_1(A) - P_0(A))$$

$$0 = P_N(A) = 1 + N(P_1(A) - 1)$$

$$-1 = N(P_1(A) - 1) \Rightarrow P_1(A) = 1 - \frac{1}{N}$$

$$\boxed{1 - \frac{\ell}{N}}$$

Pr 1 A = NÁHODNE VYBRANÝ ŠTUDENT SKÚŠKU ZLOŽÍ

JAVY
K = — // — JE ZO SKUPINY DOBRÝCH ŠTUDENTOV
L = — // — PRIEMERNÝCH — // —
M = — // — SLABÝCH — // —

$P(A) = ?$

(VETA O ÚPLNEJ PST):

$$P(A) = P(A|K)\cdot P(K) + P(A|L)\cdot P(L) + P(A|M)\cdot P(M)$$

$P(A|K) = 0{,}9$

$P(A|L) = 0{,}6$

$P(A|M) = 0{,}1$

$P(K) = \frac{8}{23}$

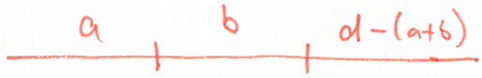
$P(L) = \frac{12}{23}$

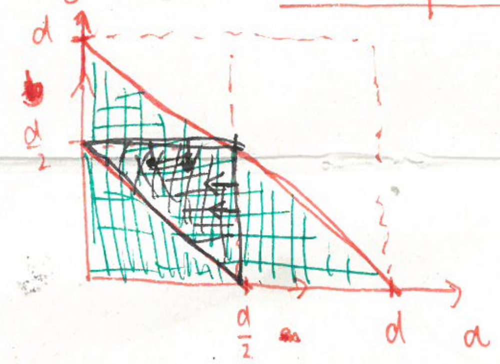
$P(M) = \frac{3}{23}$

$$= 0{,}9\cdot\frac{8}{23} + 0{,}6\cdot\frac{12}{23} + 0{,}1\cdot\frac{3}{23} = \frac{7{,}2+7{,}2+0{,}3}{23} = \frac{14{,}7}{23} = 0{,}6391$$

$$P(M|A) \overset{def}{=} \frac{P(M\cap A)}{P(A)} \overset{def}{=} \frac{P(A|M)\cdot P(M)}{P(A)} = \frac{0{,}1\cdot\frac{3}{23}}{P(A)} = \frac{0{,}1\cdot\frac{3}{23}}{\frac{14{,}7}{23}} = \frac{0{,}3}{14{,}7} = 0{,}0204$$

Pr 2 (?)





Trojuholníkové nerovnosti:

$a+b > d-(a+b) \Rightarrow \boxed{a+b > \frac{d}{2}}$

$a + d - (a+b) > b \Rightarrow \frac{d}{2} > b$

$b + d - (a+b) > a \Rightarrow \frac{d}{2} > a$

Prípustná množina: d plocha $\frac{d^2}{2}$

Množina vyhovujúca zadaniu $\frac{d}{2}$ plocha $\frac{(\frac{d}{2})^2}{2} = \frac{d^2}{8}$

Geometrická pst je $\frac{\frac{d^2}{8}}{\frac{d^2}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

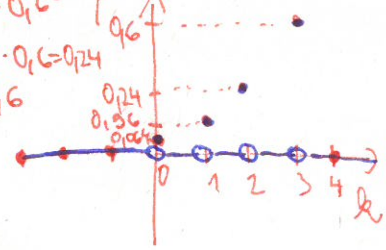
JAVY
Pr 3 X = počet nespotrebovaných nábojov

$n = 4$

$p = 0{,}6$

$$P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^3 & k=0 \\ (1-p)^{n-k-1}\cdot p & k\in\{1,2,3\} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

k	p
0	$0{,}4^3 = 0{,}064$
1	$0{,}4^2\cdot 0{,}6 = 0{,}096$
2	$0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}24$
3	$0{,}6$

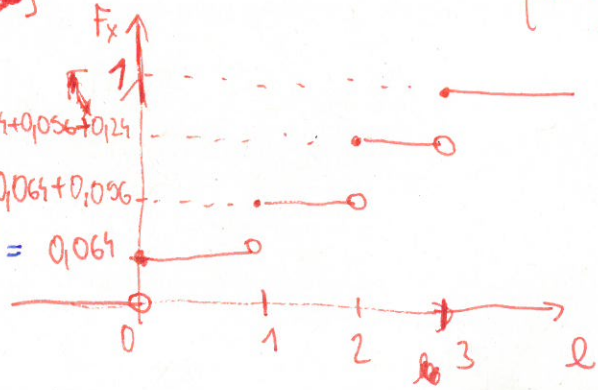


$$F_X(\ell) = P(X\le\ell) = \begin{cases} 0 & \ell<0 \\ 0{,}4^3 = 0{,}064 & 0\le\ell<1 \\ 0{,}4^3+0{,}4^2\cdot 0{,}6 & 1\le\ell<2 \\ 0{,}4^3+0{,}4^2\cdot 0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}6 & 2\le\ell<3 \\ 1 & \ell\ge 3 \end{cases}$$

$0{,}4 = 0{,}064+0{,}056+0{,}24$

$0{,}4^2 = 0{,}064+0{,}056$

$0{,}4^3 = 0{,}064$



(4)
CVIKO

$$\pi(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{3}{7}\cdot 0{,}7^x & i=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad \frac{3}{7}(0{,}7+0{,}7^2+0{,}7^3 \dots) = \frac{3}{7}\cdot\frac{0{,}7}{0{,}3} = 1$$

a) $P(X<3) = \frac{3}{7}(0{,}7+0{,}7^2) = \frac{3}{7}\cdot 0{,}1(1+0{,}7) = 1{,}7\cdot 3\cdot 0{,}1 = 0{,}51$

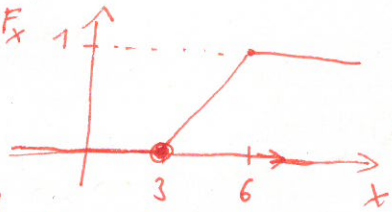
b) $P(X>4) = 1-\left(\frac{3}{7}\cdot(0{,}7+0{,}7^2+0{,}7^3)\right) = 1-3\cdot 0{,}1\cdot(1+0{,}7+0{,}7^2) = 1-0{,}3\cdot\frac{1-0{,}7^3}{0{,}3} =$

$= 1-(1-0{,}7^3) = 0{,}7^3$

c) $P(1<X<4) = P(X=2)+P(X=3) = \frac{3}{7}(0{,}7^2+0{,}7^3) = \frac{3}{7}\cdot 0{,}7^2\cdot 1{,}7$

(5)
CVIKO

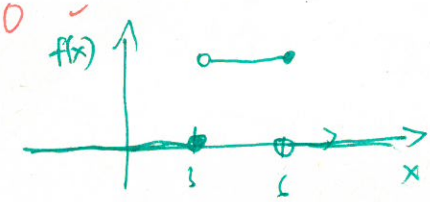
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x\le 3 \\ \frac{1}{3}x-1 & 3<x\le 6 \\ 1 & 6<x \end{cases}$$

Graf: 

a) neklesajúca, sprava spojitá, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Existuje tvrdenie, že pre funkciu s týmito vlastnosťami existuje náhodná veličina, ktorej distribučnou funkciou je práve F_X.

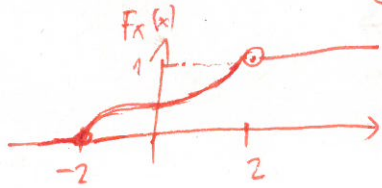
b) $$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & x\le 3 \\ \frac{1}{3} & 3<x\le 6 \\ 0 & 6<x \end{cases}$$



c) $P(2<X<4) = \int_2^4 f_X(x)\,dx = F_X(4)-F_X(2) = \frac{1}{3}\cdot 4-1-0 = \frac{1}{3}$

(6)
X

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x\le -2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) & -2<x\le 2 \\ 1 & 2<x \end{cases}$$



a) $$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & x\le -2 \\ \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot\frac{1}{2} & -2<x\le 2 \\ 0 & 2<x \end{cases} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

b) $P(-1<X<1) = F(1)-F(-1) = \frac{1}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$

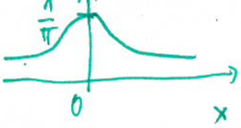
(7)
CVIKO

$f(x) = \frac{a}{1+x^2}$

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{1+x^2}\,dx = 1 = a\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = a\cdot(\arctan(\infty)-\arctan(-\infty)) = a\cdot\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = a\cdot\pi$

$\boxed{a=\frac{1}{\pi}}$

f popisuje študentovo rozdelenie (alebo Cauchyho rozdelenie)
s parametrom 1



b) $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x) - \arctan(-\infty)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right]$

c) $P(-1 < X < 1) = \frac{1}{\pi}(\arctan(1) - \arctan(-1)) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}$

„Použité vzorečky":

1. X DISKRÉTNA NÁHODNÁ VELIČINA (spočetne veľa $i \in \mathbb{R}$ takých, že $\mathbb{P}(X=i) \neq 0$)

$\pi(k) = \mathbb{P}(X=k) \quad k \in \mathbb{R}$

PRAVDEPODOBNOSTNÁ FUNKCIA X je $\pi(k)$, spĺňa $\sum_{k\in\mathbb{R}} \pi(k) = 1$.

DISTRIBUČNÁ FUNKCIA X je $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{y \le x} \pi(y)$ (kumulatívny súčet)

(má spočetne veľa bodov nespojitosti, je spojitá sprava)

2. X SPOJITÁ NÁHODNÁ VELIČINA

$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, kde f je nezáporná funkcia na $\mathbb{R}$.

Má vlastnosti: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$, $f(t) = F'(t)$ (nie je jednoznačná na množine nulovej Lebesgueovej miery)

$P(X=x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, $P(a < X < b) = F(b) - F(a) =$
$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$

V. Nech F_X je distribučná funkcia náhodnej veličiny X, potom

a) F_X je sprava spojitá

b) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

c) F_X je neklesajúca.

Platí aj opačné tvrdenie: Nech F spĺňa a), b), c), potom existuje náhodná veličina taká, že F je jej distribučná funkcia.