Vzorečky: MARGINÁLNA HUSTOTA f_X ZO združenej distribučnej funkce $F(x,y)$:

2 MOŽNOSTI: (1) URČÍME $F_X(x) = F(x,\infty)$ a potom $f_X = F'_X$

(2) URČÍME ~~ZD~~ ZDRUŽENÚ HUSTOTU $f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$, a potom $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

Zadání 11. cvičení, podzim 2019
Náhodné vektory

Potřebné pojmy k řešení příkladů jsou:

- Nezávislost náhodných veličin, náhodný vektor, marginální a sdružené pravděpodobnostní funkce, hustoty a distribuční funkce.

! NÁHODNÉ VELIČINY X, Y SÚ NEZÁVISLÉ, AK $F_X(x)\cdot F_Y(y) = F(x,y)$. POSTAČUJÚCA PODMIENKA: Ak $\boxed{f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)}$ potom X, Y sú nezávislé.

Příklad 1. *Diskrétní náhodný vektor má sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou*

$\Pi(x,y) =$

X \ Y	2	5	6	Π_X
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\to \frac{4+2+1}{20}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0	$\to \frac{3}{20}$
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\to \frac{10}{20}$
Π_Y	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	1 $\to$ VŽDY

Určete

a) *marginální distribuční a pravděpodobnostní funkce;* F_X, F_Y, Π_X, Π_Y
b) *sdruženou distribuční funkci a vhodným způsobem ji znázorněte;* $\to F(x,y)$
c) $P(Y > 3X)$.

Výsledek. $\frac{3}{20}$.

Příklad 2. *Určete distribuční funkci náhodného vektoru* (X, Y), *jehož hustota je*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(4x - y) & \text{pro } 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete dále $P(Y > 2X)$.

Výsledek. $\frac{1}{3}$.

Příklad 3. *Určete marginální distribuční funkce, sdruženou a marginální hustotu náhodného vektoru* (X, Y), *je-li* F_X, F_Y $F_{(X,Y)}$ f_X, f_Y

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \boxed{x < 0} \text{ nebo } \boxed{y < 0} \\ \frac{1}{4}x^2y^2 & \text{pro } \boxed{0 \le x \le 1}, \boxed{0 \le y \le 2} \\ 1 & \text{pro } \boxed{x > 1}, \boxed{y > 2} \\ x^2 & \text{pro } \boxed{0 \le x \le 1}, \boxed{y > 2} \\ \frac{y^2}{4} & \text{pro } \boxed{x > 1}, \boxed{0 \le y \le 2} \end{cases}$$

$$F_X(x) = F_{(X,Y)}(x,\infty) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty, y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y^2}{4} & y \in [0,2] \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

f

Příklad 4. *Určete hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru* (X, Y), *jehož distribuční funkce je*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le -1 \\ \frac{1}{\pi^2}(\arcsin x + \frac{1}{2})(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } |x| < 1 \\ \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } x \ge 1. \end{cases}$$

Určete rovněž marginální hustoty a rozhodněte, jsou-li veličiny X *a* Y *nezávislé.* f_X, f_Y

Výsledek. $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, kde $f_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 1$, jinak 0, a $f_2(x) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Jsou nezávislé.

~~**Příklad 5.**~~ *V urně je 14 kuliček – 4 červené, 5 bílých a 5 modrých. Náhodně bez vracení vybereme 6 kuliček. Určete rozložení náhodného vektoru* (X, Y), *označuje-li* X *počet tažených červených kuliček a* Y *počet tažených bílých kuliček. Určete rovněž marginální rozložení veličin* X *a* Y. *Dále vypočtěte* $P(X \le 3), P(1 \le Y \le 4)$.

Pozrite v matematike svižne a drsne, na cvičení nepočítame

~~dokonaná~~

CVIČENIE 11

① a) MARGINÁLNA PST FUNKCIA

$$\pi_X(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \pi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} & x = 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{20} & x = 2 \\ \frac{3}{10} + \frac{1}{20} + \frac{3}{20} & x = 3 \end{cases}$$ (riadkové súčty v tabuľke)

$\pi_Y(y) =$ „stĺpcové súčty v tabuľke"

MARGINÁLNA DISTRIBUČNÁ FUNKCIA (VIĎ MINULÉ CVIČENIE, KUMULATÍVNE SÚČTY)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{7}{20} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 2 \\ \frac{6}{10} & 2 \le y < 5 \\ \frac{16}{20} & 5 \le y < 6 \\ 1 & y \ge 6 \end{cases}$$

b)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 1 \vee y < 2 \\ \frac{1}{5} & 1 \le x < 2 \wedge 2 \le y < 5 \\ \frac{3}{10} & 1 \le x < 2 \wedge 5 \le y < 6 \\ \text{atď} & \\ 1 & x \ge 3 \wedge y \ge 6 \end{cases}$$

(TABUĽKA) !

X \ Y	$Y<2$	$\langle 2,5)$	$\langle 5,6)$	$Y \ge 6$
$X<1$	0	0	0	[illegible]
$\langle 1,2)$	0	$1/5$	$3/10$	$\frac{7}{20}$
$\langle 2,3)$	0	$3/10$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{2}$
$X \ge 3$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{16}{20}$	1

c) $P(Y > 3X) = \pi(1,5) + \pi(1,6) = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$

②

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \vee y \le 2 \\ g(x,y) & 1 \le x \le 2 \wedge 2 \le y \le 4 \\ 1 & x \ge 2 \wedge y \ge 4 \end{cases} \qquad F(x,y) = \begin{cases} g(x,4) & x \in [1,2],\ y \ge 4 \\ g(2,y) & x \ge 2,\ y \in [2,4] \end{cases}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{6}\int_1^x \left(\int_2^y 4s - t \, dt\right) ds = \frac{1}{6}\int_1^x \left[4st - \frac{t^2}{2}\right]_2^y ds = \frac{1}{6}\int_1^x 4sy - \frac{y^2}{2} - 8s + 2 \, ds$$

$$= \frac{1}{6}\left[4\frac{s^2}{2}y - \frac{y^2}{2}s - 8\frac{s^2}{2} + 2s\right]_1^x = \frac{1}{6}\left(2x^2y - \frac{y^2x}{2} - 4x^2 + 2x - 2y + \frac{y^2}{2} + 4 - 2\right)$$

$$1 = c\cdot\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x+y+z \, dz\, dy\, dx = c\int_0^1\int_0^2 \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2}\right]_0^3 dy\, dx =$$

$$c\cdot\int_0^1\int_0^2 (x+y)3 + \frac{9}{2}\, dy\, dx = c\int_0^1 \left[3xy + \frac{y^2}{2}\cdot 3 + \frac{9}{2}y\right]_0^2 dx =$$

$$= c\cdot\int_0^1 6x+6+9\, dx = c\left[\frac{6x^2}{2}+15x\right]$$

$$= c(3+15) \implies c = \frac{1}{18}$$

2

~~Příklad 6.~~ *Hustota náhodného vektoru (X,Y,Z) je*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y+z) & \text{pro } 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, 0\le z\le 3 \\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Určete konstantu c, distribuční funkci a vypočtěte $P(0\le X\le \frac{1}{2}, 0\le Y\le\frac{1}{3}, 0\le Z\le\frac{1}{4})$.

Výsledek. $c = \cancel{\frac{2}{3}}$, $P(0\le X\le \frac{1}{2}, 0\le Y\le\frac{1}{3}, 0\le Z\le\frac{1}{4}) = \frac{5}{48}$. (?) (analógia k príkladu 2)

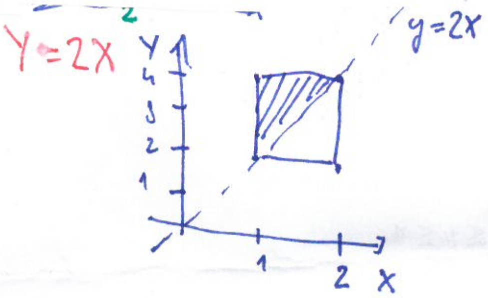
---

② $$P(Y>2X) = \frac{1}{6}\int_1^2\int_{2x}^4 4x-y\, dy\, dx = \int_1^2 \frac{1}{6}\left[4yx - \frac{y^2}{2}\right]_{2x}^4 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^2 16x - 8 - 8x^2 + 2x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^2 16x - 8 - 6x^2\, dx = \frac{1}{6}\left[16\frac{x^2}{2} - 8x - 6\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{6}\left[8x^2 - 8x - 2x^3\right]_1^2 = \frac{1}{6}(32 - 16 - 16 - 8 + 8 + 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



③

Združená hustota: $$f_{(X,Y)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{inak} \\ xy & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

Marginálna hustota:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{inak} \\ 2x & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{inak} \\ \frac{y}{2} & 0\le y\le 2 \end{cases}$$

---

④

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{inak} \\ \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{1+y^2} & |x|<1 \end{cases}$$

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \begin{cases} 0 & x\le -1 \\ \frac{1}{\pi^2}(\arcsin(x)+\frac{1}{2})\cdot\pi & |x|<1 \\ \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{arctg}\, y + \pi/2)$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{inak} \\ \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & |x|<1 \end{cases} \qquad f_Y(y) = F'_Y(y) = \left\{ \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\right.$$

Platí

$f_{(X,Y)} = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ t.j. X, Y sú stochasticky nezávislé

alebo $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$