① Jedná sa Binomické rozdelenie, ktoré popisuje n nezávislých pokusov s pst úspechu p. Píšeme $X \sim Bi(n,p) = Bi(5, 0.75)$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i \sim A(p)$ (alternatívne rozdelenie pst t.j. $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1-p$)

Platí $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad k = 0,1,\dots,n$

– E je lineárne zobrazenie, preto $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} (p \cdot 1 + (1-p)\cdot 0) = n \cdot p$
$= 5 \cdot \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$

– D spĺňa $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$, lebo X_i sú po 2 nezávislé NV

$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p\cdot(1-p) = \underline{\underline{n \cdot p(1-p)}} = 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{15}{16}}}$

$D(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p)) - p^2 = p(1-p)$

Smerodatná odchýlka $\sqrt{D} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Generujúca pst. funkcia diskrétnej náhodnej veličiny X:

$$\boxed{G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P(X=k)} = E(t^X)$$

predpokladáme, že $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$

Platí $G_X'(1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot t^{k-1} P(X=k)\right)\Big|_{t=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = E(X)$

$G_X''(1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot t^{k-2} P(X=k)\right)\Big|_{t=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{X}{k}\,(\underset{X-1}{k-1}) P(X=k) = E(X(X-1))$

Preto $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(\underbrace{X\cdot(X-1)}_{E(X^2)-E(X)}) + E(X) - (E(X))^2$

VZŤAH PRAVDEPODOBNOSTNEJ GENERUJÚCEJ FUNKCIE A MOMENT GENERUJÚCEJ FUNKCIE $M_X(t)$

$M_X(t) = E(e^{tX}) = E((e^t)^X) = G_X(e^t)$

ĎALŠIE VLASTNOSTI $G_X(t)$:

X,Y nezávislé náhodné veličiny, potom $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t)$

② $P(X=k)=p(1-p)^2 \quad k=0,1,\dots$

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty} t^k p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(t(1-p))^k = \frac{p}{1-t(1-p)} \qquad |t(1-p)|<1$$

$$G_X'(t) = -\frac{p}{(1-t(1-p))^2}\cdot(-1+p) \rightsquigarrow G_X'(1)=\frac{p}{p^2}(1-p)=\boxed{\frac{(1-p)}{p}=E(X)}$$

$$G_X''(t) = 2\frac{p(-1+p)^2}{(1-t(1-p))^3} \Big| \frac{2(1-p)^2}{p^2} =: G_X''(1)$$

$$D(X)=G_X''(1)+G_X'(1)-(G_X'(1))^2 = \frac{2(1-p)^2}{p^2}+\frac{(1-p)}{p}-\frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{(1-p)}{p}\left(1+\frac{1-p}{p}\right)$$

$$= \boxed{\frac{(1-p)}{p^2}}$$

---

③ $$E(X)=\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx \overset{p.p.}{=} [x\cdot\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(x)\,dx = \frac{\pi}{2}+[\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$$E(X^2)=\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)\,dx = [x^2\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\Big(-[x\cos(x)]_0^{\pi/2} +$$

$$+\int_0^{\pi/2}\cos(x)\,dx\Big) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2[\sin(x)]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2 = \pi-3$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ g(x) & x\in[0,\pi/2] \\ 1 & x>\pi/2 \end{cases} \qquad g(x)=\int_0^x \cos(t)\,dt = [\sin t]_0^x = \sin(x)$$

$F_X(x_{0,5})=1/2 \Rightarrow$ isk $x_{0,5}\in[0,\pi/2]$ $\quad \sin(x_{0,5})=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x_{0,5}=\frac{\pi}{6}}$

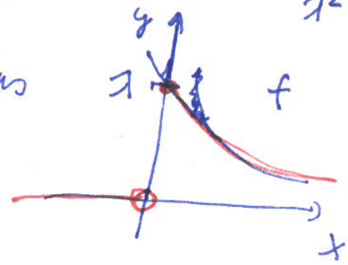
Využili se, že F_X je $[0,\pi/2]$ invertibilní.

(4) $E(X)=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = 0+\frac{1}{\lambda}$

$E(X^2)=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[x^2\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty 2x\, e^{-\lambda x}\,dx}_{2\cdot\frac{1}{\lambda}E(x)} = 0+\frac{2}{\lambda^2}$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

modus



kedže $\lambda>0$, modus je 0.

Medián $F^{-1}(1/2)$

$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x}+1$ pre $x\geq 0$

$F(x)=0$ pre $x<0$

Preto $F^{-1}(1/2)$ existuje a $-e^{-\lambda x}+1=1/2 \Rightarrow e^{-\lambda x}=1/2 \Rightarrow -\lambda x=\ln(1/2)$

$x=\frac{\ln(2)}{\lambda}$

---

(5) $C(X_1,X_2)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$

$E(X\cdot Y)=\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x\cdot y\cdot\pi(x,y) = 0\cdot(-1)\cdot c + 2c(1\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 1)+3c\cdot 2\cdot 0$
$= 6c$

$E(X)=\sum_{x\in\mathbb{R}} x\cdot\pi(x) = 1\cdot(0+2c+2c)+2\cdot(0+2c+3c) = 4c+10c=14c$

$E(Y)=\sum_{y\in\mathbb{R}} y\cdot\pi(y) = -1\cdot c + 1\cdot(2\cdot 2c) = 3c$

$C(X,Y)=6c-14c\cdot 3c = 6c(1-7c)=\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10}=0{,}18$

$1=\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\pi(x,y) = c+3\cdot 2c+3c=10c \Rightarrow c=\frac{1}{10}$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$
$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

$E(X^2)=\sum_{x\in\mathbb{R}} x^2\pi(x)=4c+4\cdot 5c=24c$

$E(Y^2)=\sum_{y\in\mathbb{R}} y^2\pi(y)=c+4c=5c$

$D(X)=24c-14^2c^2=2{,}4-1{,}96=0{,}44$
$D(Y)=5c-9c^2=0{,}5-0{,}09=0{,}41$

$R(X,Y)=\frac{0{,}18}{\sqrt{0{,}44}\cdot\sqrt{0{,}41}}=$

ZADÁNÍ 12. CVIČENÍ, PODZIM 2019
ČÍSELNÉ CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH VELIČIN

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $p_X(x)$ nenulovou pouze pro x_i, kde $i \in I$, je definována jako

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p_X(x_i).$$ (ak existuje a je konečná)

Střední hodnota spojité náhodné veličiny X s hustotou $f_X(x)$ je definovna jako

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$ (ak existuje a je konečná)

$\Rightarrow E(\cdot)$ je lineárne zobrazenie

Rozptylem (variancí) náhodné veličiny X, která má konečnou střední hodnotu, nazýváme číslo

DISPERZIA

$$D(X) = \operatorname{var} X = E([X - E(X)]^2),$$

Ak X, Y sú nekorelované, potom $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

odmocnina z rozptylu $\sqrt{D(x)}$ se pak nazývá **směrodatná odchylka**. Na výpočet rozptylu je vhodné použít vzorec $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$, platí rovněž $D(a + bX) = b^2 D(X)$.
Kovariancí náhodných veličin X, Y rozumíme

$$C(X,Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)). = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Je-li $C(X,Y) = 0$, říkáme, že X, Y jsou nekorelované. Stochasticky nezávislé náhodné veličiny jsou vždy nekorelované (nikoliv obráceně). **Koeficient korelace** je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$\rho_{X,Y} = C\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{(D(Y)}}.$$

pri normálnom $N(\mu, \sigma^2)$ rozdelení sa jedná o ekvivalenciu

Kvantily: Pro ryze monotóní distribuční funkci F_X (tj. spojitou náhodnou veličinu X s všude nenulovou hustotou, jako je tomu např. u normálního rozdělení) jde o inverzní funkci $F_X^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. To znamená, že hodnota $y = F^{-1}(\alpha)$ je taková, že $P(X \leq y) = \alpha$. Obecněji, je-li $F_X(x)$ distribuční funkce náhodné veličiny X, pak definujeme **kvantilovou funkci**

$$x_\alpha := F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in (0,1).$$

Kvantil s $\alpha = 0{,}5$ nazýváme medián. značíme $x_{0,5}$