Pr7 $X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-ty strom sa ujal} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \sim A(p)$ $\quad p = 0{,}8$, $n = 500$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n,p)$ = počet stromov, kt. sa ujali

- X_i sú po 2 nezávislé NV

$E(X) = n \cdot p = 400$

$D(X) = n \cdot p(1-p) = 80$

$\boxed{\text{Chceme } P(X \geq 380) = ?}$

CLV: $Z_n = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \sim_A N(0,1)$

$$P(X \geq 380) = P(X - E(X) \geq 380 - 400)$$
$$= P\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \geq \frac{-20}{\sqrt{80}}\right) = P\left(Z_n \geq \underbrace{-\sqrt{\frac{400}{80}}}_{-\sqrt{5}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(-\sqrt{5}) = \Phi(\sqrt{5}) \approx \Phi(2.25) \approx \underline{\underline{0{,}987}}$$

$\boxed{\text{Platí } \Phi(x) + \Phi(-x) = 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Pr 9 $\boxed{\lambda = \frac{1}{10}}$ $\boxed{n = 100}$

$X_i =$ životnosť i-tej elektrickej súčiastky $\sim Ex(\lambda)$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad X_i$ sú po 2 nezávislé NV

CLV: $Z_n = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \sim_A N(0,1)$

Chceme $P(900 \leq X \leq 1050) = ?$

$E(X_i) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\frac{1}{10}} = 10$

$D(X_i) = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{(\frac{1}{10})^2} = 100$

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \dfrac{n}{\lambda} = 1000$

$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \dfrac{n}{\lambda^2} = 100^2$

X_i nezávislé

$$= P(900 - 1000 \leq X - E(X) \leq 1050 - 1000)$$
$$= P\left(-\frac{100}{100} \leq \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \leq \frac{50}{100}\right)$$
$$= P(-1 \leq Z_n \leq 1/2) \approx \Phi(1/2) - \Phi(-1)$$
$$= \Phi(1/2) + (\Phi(1) - 1) = 0{,}69146 + (0{,}84134 - 1)$$
$$= \underline{\underline{0{,}5328}}$$

Doteraz sme používali CLV pre X_i nezávislé a rovnako rozdelené s konečným 3. momentom, potom $Z_n = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \overset{A}{\sim} N(0,1)$ $\quad n \to \infty$ $\leftarrow$ VIDÍME, ŽE Z_n je nejaká funkcia X.

Preto definujeme pojem náhodného výberu a štatistiky.

Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ tvoria $\boxed{\text{náhodný výber}}$, ak X_i sú IID = independent identically distributed random variables.

ŠTATISTIKA = náhodná veličina, ktorá ~~xxx~~ je (vhodnou) funkciou náhodného výberu $X_1, X_2, \dots, X_n$

Dôležité príklady: • výberový priemer $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

• výberový rozptyl $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

INTERVALOVÝ ODHAD PARAMETRA θ (napr. $\mu, \sigma^2, p \dots$) je interval (T_L, T_U) kde $T_L(X_1, \dots, X_n)$ a $T_U(X_1, \dots, X_n)$ sú štatistiky náhodného výberu $X_1, \dots, X_n$

Ak platí $P(T_L \leq \theta \leq T_U) = 1-\alpha$, hovoríme

(T_L, T_U) je (OBOJSTRANNÝ) $100(1-\alpha)\%$ INTERVAL SPOĽAHLIVOSTI (IS) pre parameter θ. $\alpha \in (0,1)$

- EXISTUJÚ AJ JEDNOSTRANNÉ IS:

HORNÝ ODHAD parametra θ je štatistika T_U. Povieme, že T_U je $100(1-\alpha)\%$ HORNÝ ODHAD PARAMETRA θ, ak

$$P(\theta \leq T_U) = 1-\alpha .$$

- TERAZ SA BUDEME VENOVAŤ SITUÁCII, KEĎ $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výber z ~~xxxxxx~~ $N(\mu, \sigma^2)$

Potom $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\underbrace{\mu}_{E(\bar{X})}, \underbrace{\frac{\sigma^2}{n}}_{D(\bar{X})})$ $\Rightarrow U = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{D(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{K}{n-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$

ŠTUDENTOVO ROZDELENIE s $n-1$ stupňami voľnosti

• $\bar{X}$ a K sú nezávislé N.V. $S = \sqrt{S^2}$

Parametre μ, σ^2 nemusíme nutne poznať. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

! • U používame, keď μ nepoznáme a σ^2 poznáme
• T používame, keď μ nepoznáme a σ^2 nepoznáme
(σ^2 odhadneme pomocou S^2 - jedná sa o nestranný odhad, lebo $E(S^2) = \sigma^2$)

Odvodenie obojstranného IS pre μ pre $\alpha \in (0,1)$, ak σ^2 poznáme.

(analogicky si odvodíte IS pre μ, ak σ^2 nepoznáte)

$$P(u_{\alpha/2} \leq U \leq u_{1-\alpha/2}) = \Phi(u_{1-\alpha/2}) - \Phi(u_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2 - \alpha/2 = \underline{\underline{1-\alpha}}$$

$$P\left(u_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \leq \bar{X}-\mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \geq \mu \geq \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$u_{1-\alpha/2}$

$$P\left(\underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}}_{T_U} \geq \mu \geq \underbrace{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}}_{T_L}\right) = 1-\alpha$$

$\cdot \beta = \alpha/2$

$\boxed{u_{1-\beta} = -u_\beta}$

$\boxed{t_{1-\beta} = -t_\beta}$

analogicky dostanete $P\left(\underbrace{\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}}_{T_U'} \geq \mu \geq \underbrace{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}}_{T_L'}\right) = 1-\alpha$

<u>Pr 13</u> náhodný výber $X_1, \dots, X_n$

realizácie $x_1 = 1{,}8$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}2$, $x_4 = 0{,}9$, $x_5 = 1{,}5$, $x_6 = 1{,}7$, $x_7 = 1{,}3$

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(1{,}8+1{,}4+1{,}2+0{,}9+1{,}5+1{,}7+1{,}5) = \frac{9{,}8}{7} = 1{,}4$$

$\alpha = 0{,}05$

μ neznáma

$\sigma^2 = 0{,}06$

$$t_{U,L} = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{7}} u_{0{,}975} = 1{,}4 \pm \frac{\sqrt{0{,}06}}{\sqrt{7}} 1{,}96 < \begin{matrix} 1{,}58 \\ 1{,}22 \end{matrix}$$

realizácia $T_{U,L}$

$\boxed{1{,}22 \leq \mu \leq 1{,}58 \text{ s pst } 0{,}95}$

1,96 nájdeme:

		0,06
1,9	...	0,975

$$S_X^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2$$

Nech $X_1,\dots,X_{n_1}$ náhodný výber z $N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$Y_1,\dots,Y_{n_2}$ -||- z $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ } nezávislé (X_j a Y_i sú nezávislé)

$$\left.\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)\\ \bar{Y} &= \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\end{aligned}\right\} \quad \bar{X}-\bar{Y} \sim N\Big(\overbrace{\mu_1-\mu_2}^{E(\bar{X}-\bar{Y})}, \overbrace{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}^{D(\bar{X}-\bar{Y})}\Big)$$

$$U_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$S_*^2 = \frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}, \quad S_* = \sqrt{S^2}$$

Ak $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, potom $K_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{(n_1+n_2-2)\,S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$

a $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

$(1-\alpha)$% obojstranný IS pre $\mu_1-\mu_2$ je $\bar{X}-\bar{Y} \pm S_*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\cdot t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

Pr 16 $n_1=n_2=4$, vzorka 1 = náhodný výber X_1, X_2, X_3, X_4

vzorka 2 = -||- Y_1, Y_2, Y_3, Y_4

$\bar{X} = \frac{1{,}22}{4} = 0{,}305$

$\bar{Y} = \frac{2{,}31}{4} = 0{,}5775$

$\alpha = 0{,}05$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

$S_X^2 = 0{,}00016667$ $\quad S_Y^2 = 0{,}00009167$

$S_*^2 = 0{,}00019375$

$S_* = 0{,}013919$

SPOČÍTANÉ V EXCELI :)

$$T_{u,L} = 0{,}305 - 0{,}5775 \pm 0{,}013919\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\underbrace{t_{0{,}975}(6)}_{2{,}447}$$

$$\mu_1-\mu_2 \in [-0{,}29658;\ -0{,}24842]$$

Generujúce funkcie

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (\text{„zakódovaná pst } a_k\text{"})$$

vieme dekódovať ako $a_k = \left(\frac{d}{dz}^k A(z)\right)(0)$

- Typický príklad $a_k = 1 \; \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, $|z|<1$

pracujeme s nekonečnými radmi formálne = neriešime obor konvergencie, stačí, keď vieme, že niekde konverguje

- Čo dostaneme z ℓ?

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\ell} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)^{\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot z^k$$

ℓ je pevné prirodzené číslo

Čo predstavuje b_k? b_k = počet spôsobov, ktorými vieme napísať k pomocou ℓ čísel $\in \mathbb{N}_0$

t.j. $b_k = \#$ riešení rovnice

$$n_1 + n_2 + \dots + n_\ell = k$$

preto $b_k = \binom{k+\ell-1}{\ell-1}$

máme k a $\ell-1$ oddeľovačov |

np. $k = 3$, $\ell-1 = 2$

$\bullet\bullet\bullet|\,|$ alebo $\bullet\bullet|\bullet|$ alebo $\binom{k+\ell-1}{\ell-1}$

$k+\ell-1$ pozícií a chceme umiestniť $\ell-1$ priehradiek

---

konvolúcia 2 postupností $\{a_n\}, \{b_n\}$ je postupnosť $\{c_n\}$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

a platí $\boxed{C(z) = A(z) \cdot B(z)}$

Špeciálne: $\{a_n\} = \{1\}$, potom $A(z) = \frac{1}{1-z}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k$

postupnosť čiastočných súčtov.

teda $C(z) = \frac{1}{1-z} B(z)$

kde pravdepodobnosti využijeme postupnosť čiastočných súčtov?

Pri ~~[illegible]~~ odvodení distribučnej funkcie pomocou pravdepodobnostnej funkcie.

Príklad a) Určite počet možností (na poradí nezáleží), koľkými je možné vybrať 10 káv z 5 druhov:

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5 = 10 \rightsquigarrow \binom{10+5-1}{5-1}$$

prenesieme počítanie do exponentov

alebo $(1+z+z^2+\dots)^5 = \frac{1}{(1-z)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5-1}{5-1} z^k$

a berieme koeficient pri $z^{10} \to \binom{10+5-1}{5-1}$

b) Rovnaké ako v a) ale požadujeme párny počet z každej z káv.

$$2n_1+2n_2+2n_3+2n_4+2n_5 = 10$$

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5 = 5 \to \binom{5+5-1}{5-1}$$

alebo $(1+z^2+z^4\dots)^5 = \left(\frac{1}{1-z^2}\right)^5 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5-1}{5-1} z^{2k}$

koefient pri z^{10} je $\binom{\frac{10}{2}+5-1}{5-1} = \binom{5+5-1}{5-1}$

c) je druh z káv máme k dispozícii iba 2 kusy

$$0+n_2+n_3+n_4+n_5 = 10 \rightsquigarrow \binom{10+4-1}{4-1}$$

$$1+n_2+n_3+n_4+n_5 = 10 \qquad + \binom{9+4-1}{4-1}$$

$$2+n_2+n_3+n_4+n_5 = 10 \qquad + \binom{8+4-1}{4-1}$$

$(1+z+z^2)(1+z+z^2+\dots)^4$

koeficient pri z^{10} je

$$= \frac{1-z^3}{1-z} \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)^4 = (1-z^3) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5-1}{5-1} z^k \Rightarrow \boxed{\binom{10+5-1}{5-1} - \binom{7+5-1}{5-1}}$$

TESTOVANIE HYPOTÉZ

Nech $X=(X_1,\dots,X_n)$ je náhodný výber z $N(\mu,\sigma^2)$ a θ je niektorý z parametrov rozdelenia

(A) Hypotézy $H_0: \theta=\theta_0$ x $H_1: \theta\neq\theta_0$

Nech $(D_n(X), H_n(X))$ je $(1-\alpha)\%$ IS pre θ.

Ak platí H_0, potom $1-\alpha = P(D_n(X)\le\theta_0\le H_n(X))$

kritický obor testu má tvar

$$W_\alpha=\{X\in\mathbb{R}^n: \theta_0\notin(D_n(X),H_n(X))\}$$

- Ak zistíme, že $\theta_0\notin(d_n(x),h_n(x))$ pre nejakú realizáciu x, t.j. $x\in W_\alpha$ - Teda zamietame H_0 v prospech alternatívy H_1,

príčiny:
  - buď nastal jav, H_0 má pst. α = chyba I. druhu
  - alebo neplatí H_0
- Ak $\theta_0\in(d_n(x),h_n(x))$ t.j. $x\notin W_\alpha$, potom H_0 nezamietame.

(B) $H_0: \theta=\theta_0$ x $H_1: \theta>\theta_0$

Nech $D_n(X)$ je dolný odhad θ so spoľahlivosťou $1-\alpha$

t.j. $P(D_n(X)\le\theta)=1-\alpha$

Za predpokladu H_0 je $P(D_n(X)\le\theta_0)=1-\alpha$

kritický obor testu je $W_\alpha=\{X\in\mathbb{R}^n: D_n(X)>\theta_0\}$

(C) $H_0:\theta=\theta_0$ x $H_1:\theta<\theta_0$

Nech $H_n(X)$ je horný odhad θ so spoľahlivosťou $1-\alpha$

t.j. $P(H_n(X)\ge\theta)=1-\alpha$

Za platnosti H_0 je $P(H_n(X)\ge\theta_0)=1-\alpha$

Kritický obor je $W_\alpha=\{X\in\mathbb{R}^n: H_n(X)<\theta_0\}$.

H_0	PLATÍ	NEPLATÍ
ZAMIETAME	chyba I. druhu pst α	✓ $1-\beta$
NEZAMIETAME	✓	chyba II. druhu β