VIAZANÉ EXTRÉMY

Metóda Lagrangeových multiplikátorov.

1. Vytvoríme Lagrangeovú funkciu $L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, g_k(x)$

   Hľadáme extrémy $f(x)$ na $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) = 0 \ \forall k = 1,\dots,m\}$

2. Určíme stacionárne body $L(x,\lambda)$ a označíme jeden z nich $a \in \mathbb{R}^n$.

   $\left(L'_{x_k}(x,\lambda) = 0 \ + \ L'_{\lambda}(x,\lambda) = 0 \right)$

3. Zo systému m-lineárnych rovníc

$$
m \text{ rovníc} \quad \left[\begin{aligned} &\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_m} h_m = 0 \\ &\quad \vdots \\ &\frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} h_n = 0 \end{aligned}\right.
$$

Predpokladajme, že matica sústavy má hodnosť m. Preto môžeme vyjadriť: $h_1,\dots,h_m$ v závislosti na zvyšnych $n-m$ premenných.

Tieto vektory $h_1,\dots,h_m$ ~~do~~ sú prvky tečného priestoru k M v bode a,

$$J_n(a) = \operatorname{Lin}\{g_1'(a),\dots,g_m'(a)\}^{\perp}$$

4. Určíme druhý diferenciál L k premenným x v stacionárnom bode a.

$$d^2 L(a,\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i x_j} h_i h_j = \langle L''(a) h, h \rangle$$

Vyšetríme definitnosť tejto kvadratickej formy <u>n-m premenných.</u>

$\boxed{\text{Cviko}}$:

(12) $L(x,y,\lambda) = x - y + \lambda\,(x^2 + 2y^2 - 6)$

$L'_x = 1 + \lambda \cdot 2x = 0 \ \Rightarrow \ x = -\frac{1}{2\lambda}$

$L'_y = -1 + \lambda \cdot 4y = 0 \ \Rightarrow \ y = \frac{1}{4\lambda}$

$L'_\lambda = x^2 + 2y^2 - 6 = 0$

$\frac{1}{4\lambda^2} + 2\frac{1}{16\lambda^2} - 6 = 0 \ / \ 16\lambda^2$

$4 + 2 - 6 \cdot 16\lambda^2 = 0$

$16\lambda^2 = 1$

$\lambda = \pm \frac{1}{4}$

$\lambda = 1/4 \qquad \lambda = -1/4$

$P_1 = [-2, 1], \ P_2 = [2, -1]$

$f(P_1) = -2 - 1 = -3 \quad f(P_2) = 2 + 1 = 3$

Weierstrassova veta: Spojitá funkcia na kompaktnej množine (naša elipsa) nadobúda svojho maxima a minima, preto P_1 je lok. min. P_2 je lok. max.

<u>Alebo cez Lagrangeove multiplikátory:</u> Máme $F'_x = 2x$, $F'_y = 4y$

$\boxed{\begin{aligned} &F'_x(P_2)h_1 + F'_y(P_2)h_2 = 0 \\ &4h_1 - 4h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2 \end{aligned}}$

$F'_x(P_1)h_1 + F'_y(P_1)h_2 = 0$

$-4h_1 + 4h_2 = 0 \ \Rightarrow \ h_1 = h_2$

$L''_{xx} = 2\lambda \quad L''_{yy} = 4\lambda \quad L''_{xy} = 0$

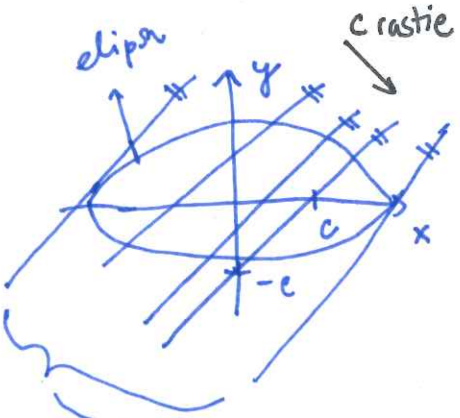
$D^2_{x,y} F_{(h_1,h_1)} = (h_1, h_1)\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 4\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 \end{pmatrix} = (h_1, h_1)\begin{pmatrix} 2\lambda h_1 \\ 4\lambda h_1 \end{pmatrix}$

$= 2\lambda h_1^2 + 4\lambda h_1^2 = 6\lambda h_1^2$ < lok max $\lambda < 0$. P_2; lok min $\lambda > 0$. P_1

12 (Iný prístup – graficky)

Vrstevnice funkcie $f(x,y) = x - y$ sú $f_c(x,y) = \underline{x - y = c}$ pre $c \in \mathbb{R}$ pevné

ohraničujúca množina: $\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$ t.j. elipsa



$\boxed{x - c = y}$ $\underline{c > 0}$

kde bude bod minim / maxima funkcie $x-y$ na množine elipsy? Presne tam, kde bude c minimálne / maximálne

t.j. $x - c = y$ je tečná k elipse, preto chceme, aby mala nasledujúca rovnica práve jedno riešenie:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{(x-c)^2}{3} = 1$$

$$\frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{3} - \frac{2xc}{3} + \frac{c^2}{3} = 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{2xc}{3} + \frac{c^2}{3} - 1 = 0$$

$$D = \frac{4c^2}{9} - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c^2}{3} - 1\right) = 0$$

$$\frac{1}{6}c^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{9}c^2 \quad / 18$$

$$3c^2 - 9 = 2c^2$$

$$c^2 = 9$$

$$c = \pm 3$$

$$x_1, x_2 = \frac{\frac{2}{3}c \pm 0}{1} = \pm 2$$

teda $[2, -1]$, $c = 3$ maximum | $[-2, 1]$, $c = -3$ minimum

---

cviko

Pr 13 $h(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $x,y,z > 0$, $x \cdot y \cdot z = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{y \cdot z}$

DOSADZOVACIA METÓDA – NIE JE MOŽNÁ VŽDY

$$h\left(\frac{36}{y \cdot z}, y, z\right) = \frac{36}{y \cdot z} + 2y + 3z$$

$h'_y = -\frac{36}{zy^2} + 2 = 0 \Rightarrow 18 = zy^2$

$h'_z = -\frac{36}{z^2y} + 3 = 0 \Rightarrow 12 = z^2y \;/\cdot y \Rightarrow 12y = z^2y^2 = z \cdot 18$ t.j. $\boxed{2y = 3z}$

dosadíme

$18 = \frac{2y}{3} \cdot y^2 \Rightarrow 3^3 = y^3 \Rightarrow \boxed{y = 3}$, $\boxed{z = 2}$ $P = [3,2]$

$h''_{yy} = \frac{2 \cdot 36}{z}\frac{1}{y^3} \overset{P}{\leadsto} \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$

$h''_{zz} = \frac{2 \cdot 36}{y}\frac{1}{z^3} \overset{P}{\leadsto} \frac{9}{3} = 3$

$h''_{yz} = \frac{36}{z^2y^2} \overset{P}{\leadsto} 1$

$$H = \begin{pmatrix} \overset{>0}{4/3} & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

det $H = 4 - 1 = 3 > 0$

Lokálne minimum je v $[6, 3, 2]$.

$\boxed{P_1 13}$ $h(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $F(x,y,z) = x\cdot y\cdot z = 36$, $x>0, y>0, z>0$

- METÓDA LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTOROV:

$$L(x,y,z,\lambda) = x + 2y + 3z - \lambda(x\cdot y\cdot z - 36)$$

$$L_x = 1 - \lambda yz = 0 \,/\cdot x$$
$$L_y = 2 - \lambda xz = 0 \,/\cdot y$$
$$L_z = 3 - \lambda xy = 0 \,/\cdot z$$
$$x\cdot y\cdot z = 36$$

$$\ominus \begin{cases} x - \lambda 36 = 0 \\ 2y - \lambda 36 = 0 \\ 3z - \lambda 36 = 0 \end{cases} \ominus \Rightarrow \begin{matrix} x - 2y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{matrix} \quad (*)$$

$$\boxed{y = \frac{x}{2}, \ z = \frac{x}{3}}$$

$$x\cdot \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3} = 6^2 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

Z $(*)$ máme $\boxed{y = 3, \ z = 2}$

Vidíme, že platia rovnaké podmienky, ako plynú z AG nerovnosti

$\boxed{P = [6,3,2]}$ $\lambda = 1/6$

Podmienka: $g'_x(P)h_1 + g'_y(P)h_2 + g'_z(P)\cdot h_3 = 0$

$$yz(P)h_1 + xz(P)h_2 + xy(P)\cdot h_3 = 0$$

$$6h_1 + 12\cdot h_2 + 18h_3 = 0 \Rightarrow h_1 + 2h_2 + 3h_3 = 0$$

$$\Rightarrow h_1 = -(2h_2 + 3h_3)$$

2. diferenciál $L(x,y,z,\lambda)$ vzhľadom k x,y,z:

$$d^2L(x,y,z,\lambda) = (h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{xy} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{xz} & L''_{yz} & L''_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{L''_{xx} = 0 = L''_{yy} = L''_{zz}}$$

$$L''_{xy} = -\lambda z \overset{P}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{6}2 = -\frac{1}{3}$$
$$L''_{xz} = -\lambda y \overset{P}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{6}3 = -\frac{1}{2}$$
$$L''_{yz} = -\lambda x \overset{P}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{6}6 = -1$$

$$(-(2h_2+3h_3), h_2, h_3)\begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(2h_2+3h_3) \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$(-(2h_2+3h_3), h_2, h_3) \begin{pmatrix} -1/3\,h_2 - 1/2\,h_3 \\ \frac{2}{3}h_2 \\ \frac{3}{2}h_3 \end{pmatrix} = (2h_2+3h_3)(1/3\,h_2 + 1/2\,h_3) + \frac{2}{3}h_2^2 + \frac{3}{2}h_3^2$$

$$= \frac{2}{3}h_2^2 + \frac{3}{2}h_3^2 + 2h_3h_2 + \frac{2}{3}h_2^2 + \frac{3}{2}h_3^2$$

$$\boxed{3h_3^2 + \frac{4}{3}h_2^2 + 2h_3\cdot h_2}$$

MATICA KVADRATICKEJ FORMY:

$$K = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 4/3 > 0$$

$\det K = 4 - 1 = 3 > 0$

$\Rightarrow$ POZITÍVNE DEFINITNÁ LOKÁLNE MINIMUM.

VŠIMNITE SI, ŽE MÁME ROVNAKÚ HESSOVU MATICU :)

(12) DOSADENIE: $f(x,y) = x - y$

$x^2 + 2y^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6-2y^2}$

1) $f(\sqrt{6-2y^2}, y) = \sqrt{6-2y^2} - y$ $\qquad f'(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6-2y^2}}\cdot(-4y) - 1 = 0$

$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6-2y^2}} \cdot (-4y) = 1 \quad \to \boxed{y<0}$

$-2y = \sqrt{6-2y^2}$

$4y^2 = 6 - 2y^2$

$6y^2 = 6$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

$\Rightarrow y = -1$

$$f''(y) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6-2y^2}}(-4)}_{=\frac{1}{y}} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 4y \frac{1\cdot(-4y)}{(6-2y^2)\cdot\sqrt{6-2y^2}}}_{y\cdot 2}$$

$f''(-1) = -1 - 2 = -3 < 0$

v -1 má $f(\sqrt{6-2y^2}, y)$ lokálne ~~minimum~~ maximum

$[2,-1]$ je bod lokálneho maxima f na M.

2) $f(-\sqrt{6-2y^2}, y) = -\sqrt{6-2y^2} - y$

$f'(y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6-2y^2}}\cdot(-4y) - 1 = 0 \Rightarrow 2y = \sqrt{6-2y^2} \Rightarrow y > 0$

$\Downarrow \; y = 1$

$f''(y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6-2y^2}}\cdot(-4) - \frac{1}{4}4y\frac{1\cdot(-4y)}{(6-2y^2)\sqrt{6-2y^2}}$

$f''(+1) = 1 + 2 = 3 > 0$ lok. minimum.

$[-2, 1]$ je bod lokálneho minima f na M.

Výpočet je veľmi zložitejší. Skúste si vyskúšať Lagrangeovu funkciu :)

(13) AG NEROVNOSŤ:

$F(x,y,z) = x \cdot y \cdot z = 36 \qquad x,y,z > 0$

$h(x,y,z) = x + 2y + 3z$

AG: $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$ rovnosť nastane práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = x_3$

Označme $x_1 = x$, $x_2 = 2y$, $x_3 = 3z$. Dostávame $\frac{x + 2y + 3z}{3} \geq \sqrt[3]{x\cdot 2y \cdot 3z} = \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{\underset{6^2}{36}} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

$$\boxed{x + 2y + 3z \geq 18}$$

Minimum nastáva, keď $x = 2y = 3z$ t.j. $x \cdot \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3} = 36$

$y = \frac{x}{2}, z = \frac{x}{3}$ $\qquad x^3 = 6^3$

$[6,3,2] \to$ globálne minimum. $\qquad x = 6$

Ešte je nutné ukázať, že neexistuje maximum.

(príp. lok. min/max)

$\hookrightarrow$ viď iný postup.