1. domáca úloha - riešenie

Úloha 1. Najděte
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + x^2y^2 + y^4}{|x^3| + y^2}.$$

Riešenie. Budeme postupovať podľa návodu. Najskôr označme
$$g_n(x,y) := \frac{x^3y + x^2y^2 + y^4}{|x^3| + |y^n|}.$$

Prevodom do polárnych súradníc obdržíme pre $\varphi \in [0, 2\pi]$:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_3(x,y) = \lim_{r\to 0_+} r\frac{\sin^3\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi}{|\sin^3\varphi| + |\cos^3\varphi|} = \lim_{r\to 0_+} rh(\varphi).$$

Funkcia $h(\varphi)$ je spojitá na $[0, 2\pi]$, pretože jej menovateľ je nenulový. Potom podľa Weierstrassovej vety je $h(\varphi)$ ohraničená na tomto intervale (a nadobúda svojej najmenšej a najväčšej hodnoty). Teda máme
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_3(x,y) = \lim_{r\to 0_+} rh(\varphi) = 0.$$

Na prstencovom okolí $(-1,1)^2 \setminus \{(0,0)\}$ bodu $(0,0)$ isto platí
$$-|g_3(x,y)| \leq g_2(x,y) \leq |g_3(x,y)|. \tag{1}$$

Spočítame $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |g_3(x,y)|$, čo môžeme urobiť na základe jedného z troch argumentov:

- Veta o limite zloženej funkcie $|g_3(x,y)|$ v $(0,0)$ hovorí, že táto limita je
$$\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_3(x,y)\right| = 0,$$
pretože $|\cdot|$ je spojitá funkcia v $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_3(x,y) = 0$.

- Jednoduchou úpravou máme
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |g_3(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sgn}(g_3(x,y))g_3(x,y) = 0,$$
pretože znamieková funkcia je zrejme obmedzená a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_3(x,y) = 0$.

- Z definície limity máme hneď $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_3(x,y) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |g_3(x,y)|$.

Požadovanú limitu dostaneme aplikováciou vety o troch limitách z nerovnosti (1) t. j.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_2(x,y) = 0.$$

Iný prístup od *Michala Barnišina* (*Vít Jelínek* postupoval tiež veľmi podobne) nájdete v prílohe.

□

Úloha 2. Najděte stacionární body funkce
$$f(x,y) = x + y + 4\sin(x)\sin(y)$$
a zjistěte, v kterých nabývá funkce f svého lokálního minuma nebo maxima. Nabývá f svého globálního minima nebo maxima na celém definičním oboru?

Riešenie. Nutná podmienka pre extrém v bode (x, y) je daná nasledujúcimi rovnicami:

$$f'_x(x,y) = 1 + 4\cos(x)\sin(y) = 0$$
$$f'_y(x,y) = 1 + 4\sin(x)\cos(y) = 0.$$

Z rozdielu týchto rovníc a pozorovaním, že v stacionárnom bode je isto $\cos(x), \cos(y) \neq 0$, dostávame podmienku:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y).$$

Vzhľadom k tomu, že $\tan$ je π-periodická funkcia, nutne platí $x = y + k\pi$ pre $k \in \mathbb{Z}$. Dosadením do druhej podmienky dostaneme:

$$0 = 1 + 4(\cos(y)\sin(k\pi) + \sin(y)\cos(k\pi))\cos(y) = 1 + 4(-1)^k \sin(y)\cos(y).$$

Teda $\sin(2y) = \frac{(-1)^{k+1}}{2}$ a $2y \in \{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + 2l\pi, (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi + 2l\pi\}$ pre $l \in \mathbb{Z}$. Povšimnime si, že na intervale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ máme celkovo 2^3 stacionárnych bodov.

Hessova matica funkcie f v bode (x, y) je

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -4\sin(x)\sin(y) & 4\cos(x)\cos(y) \\ 4\cos(x)\cos(y) & -4\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{aligned} \det(Hf(x,y)) &= 16(\sin^2(x)\sin^2(y) - \cos^2(x)\cos^2(y)) \\ &= 16(\sin^2(x)(1-\cos^2(y)) - (1-\sin^2(x))\cos^2(y)) = 16(\sin^2(x) - \cos^2(y)) \\ &= 16(\sin^2(y+k\pi) - \cos^2(y)) = 16(\sin^2(y) - \cos^2(y)) = -16\cos(2y). \end{aligned}$$

Preto sa extrém nachádza iba v stacionárnych bodoch, ktoré splňujú $\cos(2y) < 0$ t. j. $2y \in (-\frac{\pi}{2} + \pi + 2p\pi, \frac{\pi}{2} + \pi + 2p\pi)$ pre $p \in \mathbb{Z}$. Poznamenajme, že pre všetky stacionárne body platí $\cos(2y) \neq 0$. Vzhľadom k predošlému musí byť $2y = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi + 2l\pi$ a lokálny extrém nastáva v 2^2 bodoch na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Zostáva určiť typ extrému. Prvý minor Hessovej matice je $-4\sin(x)\sin(y) = -4\sin(y+k\pi)\sin(y) = -4(-1)^k\sin^2(y) = 4(-1)^{k+1}\sin^2(y)$ a závisí na parite k.

Celkovo máme lokálne extrémy v bodoch $[(-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + (l+k)\pi, (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + l\pi]$ pre $l, k \in \mathbb{Z}$. Ak k je nepárne, jedná sa o lokálne minimum. V opačnom prípade (k je párne) sa jedná o lokálne maximum.

Funkcia f nemá globálne extrémy, pretože pre každý bod $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$f(x+y-5, 0) < f(x,y) < f(x+y+5, 0).$$

$\square$

Domáca úloha 1

Michal Barnišin, učo 485135

15. októbra 2019

Príklad 1

Nájdite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + x^2y^2 + y^4}{|x^3| + y^2}$$

Riešenie. Zrejme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + x^2y^2 + y^4}{|x^3| + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \frac{x^3 + x^2y + y^3}{|x^3| + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \cdot \frac{x^3 + x^2y + y^3}{|x^3| + y^2} \tag{1}$$

Dokážeme, že výraz $V = \frac{x^3+x^2y+y^3}{|x^3|+y^2}$ je ohraničený, z čoho podľa vety o limite obmedzenej funkcii bude plynúť, že *hľadaná limita je 0* pre $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Uvažujme teda výraz V z (1) na prstencovom okolí bodu $[0, 0]$ s polomerom 1. Keďže platí (postupne využijeme trojuholníkovú nerovnosť; fakt, že $\left|x^2\right| = x^2$ a nezápornosť sčítancov menovateľa; to, že pre $y \in (-1, 1)$ platí $y^2 \leq |y|$; $|y| \cdot |y| = y^2$ a delenie so zvyškom):

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3 + x^2y + y^3}{|x^3| + y^2}\right| &\leq \frac{\left|x^3\right| + \left|x^2y\right| + \left|y^3\right|}{\left||x^3| + y^2\right|} = \frac{\left|x^3\right| + x^2|y| + y^2|y|}{|x^3| + y^2} \leq \\ &\leq \frac{\left|x^3\right| + x^2|y| + |y| \cdot |y|}{|x^3| + y^2} = \frac{\left|x^3\right| + x^2|y| + y^2}{|x^3| + y^2} = 1 + \frac{x^2|y|}{|x^3| + y^2}\end{aligned} \tag{2}$$

a podľa AG nerovnosti platí pre nezáporné sčítance menovateľa:

$$\left|x^3\right| + y^2 \geq 2 \cdot \sqrt{|x^3| \cdot y^2} = 2 \cdot |x||y| \sqrt{|x|} \geq 2 \cdot |x||y| \sqrt{x^2} \geq 2 \cdot |x|^2|y| = 2 \cdot x^2|y| \tag{3}$$

kde $|x| \geq x^2$ platí pre $x \in (-1, 1)$,

tak pre $|V|$ (z (2) a (3)) platí:

$$\left|\frac{x^3 + x^2y + y^3}{|x^3| + y^2}\right| \leq 1 + \frac{x^2|y|}{|x^3| + y^2} \leq 1 + \frac{x^2|y|}{2 \cdot x^2|y|} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \tag{4}$$

Teda V je na tomto okolí bodu $[0, 0]$ ohraničený, lebo $-\frac{3}{2} \leq -|V| \leq V \leq |V| \leq \frac{3}{2}$, čo bolo treba dokázať.