2. domáca úloha - riešenie

Úloha 1. Nechť a je kladné reálné číslo. Dokažte, že množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0\}$$

je omezená. V okolí kterých bodů $(x, y) \in M$ nelze M popsat pomocí grafu funkce $y = h(x)$? V kterých bodech množiny M je souřadnice y maximální a v kterých minimální? K zodpovězení otázek použijte implicitní funkci.

Riešenie. Najskôr ukážeme, že množina M je obmedzená. Nájdeme $\epsilon > 0$ také, že $M \subseteq B_\epsilon(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \rho(x, y) < \epsilon\}$ vzhľadom k nejakej metrike ρ na $\mathbb{R}^2$ (na $\mathbb{R}^n$ sú všetky metriky ekvivalentné, preto stačí ukázať obmedzenosť vzhľadom k jednej z nich - my si vyberieme euklidovskú metriku). Transformáciou do polárnych súradníc dostávame

$$F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^4 - a^2r^2\cos 2\varphi = r^2(r^2 - a^2\cos 2\varphi) = 0.$$

Teda na množine M platí $\sqrt{x^2 + y^2} = r = 0$ alebo $x^2 + y^2 = r^2 = a^2\cos 2\varphi \le a^2$. Preto stačí položiť $\epsilon = a + 1 > 0$.

Vieme, že M ide popísať pomocou grafu funkcie $y = h(x)$ na okolí bodov $(x, y) \in M$ takých, že

$$F'_y(x, y) = 2(x^2 + y^2)2y + a^2 2y = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2) \neq 0.$$

Zostáva preskúmať body s $y = 0$ t. j. $(\pm a, 0), (0, 0)$. Vzhľadom k tomu, že množina M je symetrická podľa osi x (aj podľa osi y), na okolí bodov $(\pm a, 0), (0, 0)$ nejde M popísať pomocou grafu funkcie $y = h(x)$.

Poznamenajme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je kompaktná, pretože M je obmedzená a uzavretá („je daná uzavretou podmienkou – rovnosťou“) podmnožina $\mathbb{R}^2$. Teda spojitá funkcia $f(x, y) = y$ nadobúda svojho maxima a minima na kompaktnej množine M podľa Weierstrassovej vety. Takýto globálny extrém môže nastať buď v stacionárnom bode Lagrangeovej funkcie $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y)$, alebo v bode, kde niektorá z parciálnych derivácií L neexistuje. V našom prípade stačí nájsť stacionárne body L (L je polynomiálna funkcia) a porovnať súradnice y.

Avšak zadanie požaduje využitie implicitnej funkcie, preto postupujme nasledovne. Zo symetrie M stačí hľadať globálne maximum (vzhľadom k predošlému odstavcu existuje) funkcie

$$f(x, y) = y = \begin{cases} h(x) > 0 & x \in (0, a) \\ 0 & x \in \{0, a\} \end{cases}.$$

Opäť toto maximum môže nastať buď v stacionárnom bode $h(x)$, alebo v bodoch $x \in \{0, a\}$. Podľa vety o implicitnej funkcii stacionárne body $h(x)$ na $(0, a)$ sú dané podmienkou

$$h'(x) = -\frac{F'_x(x, h(x))}{F'_y(x, h(x))} = 0.$$

Zaoberáme sa rovnosťou $F'_x(x, y) = 2(x^2 + y^2)2x - a^2 2x = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2) = 0$, čo pre $x \in (0, a)$ dáva podmienku $2x^2 + 2y^2 - a^2 = 0$. Dosadením tejto podmienky do $F(x, y) = 0$ obdržíme stacionárny bod $x_0 = a\sqrt{\frac{3}{8}}$ s $h(x_0) = a\sqrt{\frac{1}{8}} > 0$. Preto maximálna súradnica y množiny M je $a\sqrt{\frac{1}{8}}$ a minimálna je $-a\sqrt{\frac{1}{8}}$. $\square$

Úloha 2. Nechť $A = (a_{ij})$ je symetrická matice $n \times n$. Najděte globální extrémy kvadratické funkce

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

na jednotkové sféře

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}.$$

Riešenie. Evidentne f je spojitá (kvadratická) funkcia na kompaktnej množine S^{n-1}, teda f nadobúda globálnych extrémov na jednotkovej sfére podľa Weierstrassovej vety. A takýto extrém musí byť nutne v stacionárnom bode Lagrangeovej funkcie L, ktorá je polynomiálna. Označme $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a nech $\langle -, - \rangle$ je štandardný skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$. Potom Lagrangeova funkcia je

$$L(x, \lambda) = \langle x, Ax \rangle - \lambda(\langle x, x \rangle - 1).$$

Podmienky pre stacionárny bod (x, λ) sú

$$\begin{aligned} L'_x(x, \lambda) &= 2Ax - 2\lambda E x = 2(A - \lambda E)x = 0 \\ L'_\lambda(x, \lambda) &= \langle x, x \rangle - 1 = 0. \end{aligned}$$

Teda dvojica (x, λ) predstavuje vlastný vektor veľkosti jedna príslušný k reálnemu vlastnému číslu λ. Pretože matica A je symetrická reálna matica, existuje báza vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$ nad tvorená vlastnými vektormi lineárneho zobrazenia $x \mapsto Ax$, a tieto vlastné vektory príslušia reálnym vlastným číslam. Nech (x^*, λ^*) je stacionárny bod Lagrangeovej funkcie L, potom platí

$$f(x^*) = \langle x^*, Ax^* \rangle = \langle x^*, \lambda^* x^* \rangle = \lambda^* \langle x^*, x^* \rangle = \lambda^*.$$

Teda globálne maximum f na S^{n-1} je $\max_{1 \le k \le n} \lambda^k$ a globálne minimum f na S^{n-1} je $\min_{1 \le k \le n} \lambda^k$, kde $\{\lambda^k\}_{k=1}^{n}$ sú všetky vlastné čísla matice A včetne násobnosti. Poznamenajme, že ku každému vlastnému číslu A existujú aspoň dva vlastné vektory veľkosti jedna. Na druhej strane, ak je algebraická násobnosť vlastného čísla aspoň 2, potom takýchto vlastných vektorov je nespočítateľne veľa. $\square$