3. domáca úloha

Úloha 1. Uvažujme kvadratický polynóm $x^2 + ax + b$ s reálnymi koeficientami splňujúcimi $|a|, |b| \leq 1$. Predpokladajme, že všetky prípustné hodnoty neznámych koeficientov a a b sú rovnako pravdepodobné. Zodpovedajte nasledujúce otázky.

a) Určite pravdepodobnosť, že všetky korene tohto polynómu sú komplexné **s nenulovou imaginárnou zložkou**.

b) Určite pravdepodobnosť javu, že jeden koreň je kladný a druhý záporný.

Riešenie.

a) Prípustná množina (množina elementárnych javov) Ω koeficientov (a, b) polynómu je štvorec $[-1, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Základná veta algebry hovorí, že ku každému polynómu stupňa $n \geq 1$ s reálnymi koeficientami existuje práve n komplexných koreňov včetne násobnosti. Označme jav, že všetky korene vybraného polynómu sú komplexné s nenulovou imaginárnou zložkou, ako A. Potom zo základnej vety algebry a vlastností diskriminantu kvadratického polynómu máme

$$A = \{(a, b) \in \Omega | D = a^2 - 4b < 0\}.$$

Z definície geometrickej pravdepodobnosti je

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2\int_0^1 (1 - \frac{a^2}{4})\mathrm{d}a}{2^2} = \frac{11}{24},$$

kde μ značí mieru (plochu) danej množiny.

b) Z Vietových vzťahov musí nutne platiť $x_1 x_2 = b < 0$ pre korene x_1, x_2 nášho polynómu. Zo základnej vety algebry pre každú dvojicu (a, b) s $b < 0$ má ňou určený kvadratický polynóm korene s kladným aj záporným znamienkom. Preto hľadaná pravdepodobnosť je $\frac{1}{2}$.

$\square$

Úloha 2. Predstavte si, že sledujete finále tenisového Wimbledonu medzi Rogerom Federerom a Novakom Djokovićom a aktuálna hra tejto dvojhry je v zhode[1]. Ste verným fanúšikom Rogera[2] a zaujíma vás, s akou pravdepodobnosťou získa túto hru[3] za predpokladu, že tento hráč má pravdepodobnosť zisku bodu $\theta \in (0, 1)$ a jednotlivé body sú hrané nezávisle v rámci jednej hry. Určite túto pravdepodobnosť.

Riešenie. Uvažujme náhodnú prechádzku $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ popisujúcu rozdiel získaných bodov Rogera a Novaka v danej hre po n výmenách, kde $P(X_i = 1) = \theta$ a $P(X_i = -1) = 1 - \theta$. Nech B je jav, že Roger vyhrá hru a označme $P_k(B) = P(B | S_0 = k)$. Máme určiť $P_0(B)$ a vieme, že $P_2(B) = 1$ a $P_{-2}(B) = 0$. Zrejme javy $\{X_i = 1\}$ (Roger získa i-ty bod) a $\{X_i = -1\}$ (Roger stratí i-ty bod) tvoria úplný systém javov. Z vety o úplnej pravdepodobnosti máme

$$\begin{aligned}
P_0(B) &= P_1(B)\theta + P_{-1}(B)(1 - \theta), \\
P_1(B) &= P_2(B)\theta + P_0(B)(1 - \theta) = \theta + P_0(B)(1 - \theta), \\
P_{-1}(B) &= P_0(B)\theta + P_{-2}(B)(1 - \theta) = P_0(B)\theta.
\end{aligned}$$

[1] Stav v tejto hre je $40 : 40$.

[2] Prípadne Novaka 🙂.

[3] **Hru vyhraje hráč, ktorý v nejakom okamihu bude viesť o dva body. Alebo riešte podľa pravidiel tenisu.**

Využili sme fakt, že $P_k(B|X_1 = 1) = P_{k+1}(B)$ a $P_k(B|X_1 = -1) = P_{k-1}(B)$. Zo sústavy rovníc ihneď dostávame $P_0(B) = 2\theta(1-\theta)P_0(B) + \theta^2$. Celkovo máme

$$P_0(B) = \frac{\theta^2}{1 - 2\theta(1-\theta)} = \frac{\theta^2}{\theta^2 + (1-\theta)^2}.$$

Túto pravdepodobnosť je možné interpretovať ako

$$\frac{\text{Pravdepodobnosť, že Roger vyhrá 2 body po sebe v danom okamihu.}}{\text{Pravdepodobnosť, že Roger alebo Novak vyhrá 2 body po sebe v danom okamihu.}}.$$

Graf funkcie $P_0(B)(\theta)$ na intervale $[0, 1]$ tvorí písmeno S a pripomína tak *sigmoid* (logistické) funkcie, ktoré majú význam napr. v neurónových sieťach. $\square$