4. domáca úloha - riešenie

Úloha 1 (0.5b)**.** Uvažujme nasledujúcu hru. Hráč hádže kockou tak dlho, dokiaľ nepadnú dve hodnoty šesť v dvoch po sebe idúcich hodoch. Nech náhodná veličina X udáva celkový počet hodov kockou. Určite pravdepodobnostnú generujúcu funkciu náhodnej veličiny X a pomocou nej určite charakteristiky $E(X)$ a $D(X)$. Riešte za predpokladu, že kocka je férová t.j. každá z hodnôt 1 až 6 môže padnúť s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$.

Riešenie. Najskôr poznamenajme, že pravdepodobnostná funkcia $\pi_X(k)$ je nenulová iba pre $k \in \mathbb{N}$. Pre inšpiráciu si určíme niektoré počiatočné hodnoty π_X.

$$\begin{aligned}\pi_X(1) &= 0,\\ \pi_X(2) &= \frac{1}{6^2},\\ \pi_X(3) &= \frac{5}{6^3},\\ \pi_X(4) &= \frac{6\cdot 5}{6^4} = \frac{5}{6^3}.\end{aligned}$$

Budeme uvažovať postupnosti bodov kocky reprezentované prvkami množiny $\{a, 6\}$. Pričom 6 bude značiť jav, že v danom ťahu padla hodnota šesť, a jav a bude doplnok javu 6 pre daný ťah. Formálne takáto postupnosť vyjadruje prienik javov, že v i-tom hode padla 6 alebo nepadla 6, cez všetky uvažované hody i. Teda pre pravdepodobnosti týchto javov platí $P(a) = \frac{5}{6}$ a $P(6) = \frac{1}{6}$. Preto jav $\{X = 3\}$ ide vyjadriť iba pomocou postupnosti $a66$. Na druhú stranu jav $\{X = 4\}$ získame ako zjednotenie $aa66$ a $6a66$ z postupnosti $a66$. Jav $\{X = n + 3\}$ pre $n \geq 2$ vieme získať z výrazov $aab(n + 1)$, $6ab(n + 1)$ a $a6ab(n)$, kde $b(k)$ je ľubovolná postupnosť pre $\{X = k\}$. Všimnite si, že fixná časť takejto postupnosti musí končiť na a. Preto postupnosti $aab(n+1)$ a $a6ab(n)$ vieme reprezentovať ako postupnosť $ab(n+2)$, celkovo máme 2 typy postupností pre tento prípad, a to $ab(n + 2)$ a $6ab(n + 1)$. Preto platí

$$\pi_X(n+3) = \frac{5}{6}(\pi_X(n+2) + \frac{1}{6}\pi_X(n+1)) \text{ pre } n \geq 0.$$

Zostáva odvodiť generujúcu pravdepodobnostnú funkciu $G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_X(k)t^k$ pre X. Bude aplikovať jednoduché algebraické úpravy na predošlú rekurentnú formulku.

$$\begin{aligned}\pi_X(n+3)t^{n+3} &= \frac{5}{6}t\pi_X(n+2)t^{n+2} + \frac{5}{36}t^2\pi_X(n+1)t^{n+1},\\ \sum_{n=0}^{\infty}\pi_X(n+3)t^{n+3} &= \frac{5}{6}t\sum_{n=0}^{\infty}(\pi_X(n+2)t^{n+2}) + \frac{5}{36}t^2\sum_{n=0}^{\infty}\pi_X(n+1)t^{n+1},\\ \sum_{n=3}^{\infty}\pi_X(n)t^{n} &= \frac{5}{6}t\sum_{n=2}^{\infty}(\pi_X(n)t^{n}) + \frac{5}{36}t^2\sum_{n=1}^{\infty}\pi_X(n)t^{n},\\ G_X(t) - \frac{1}{6^2}t^2 - \frac{5}{6^3}t^3 &= \frac{5}{6}t(G_X(t) - \frac{1}{6^2}t^2) + \frac{5}{36}t^2G_X(t),\\ G_X(t) &= \frac{\frac{1}{6^2}t^2}{1 - \frac{5}{6}t - \frac{5}{36}t^2} = \frac{t^2}{36 - 30t - 5t^2}.\end{aligned}$$

Zostáva spočítať číselné charakteristiky $E(X)$ a $D(X)$.

$$
\begin{aligned}
E(X) = G'_X(1) &= \left.\frac{2t(36-30t-5t^2) - t^2(-30-10t)}{(36-30t-5t^2)^2}\right|_{t=1} = 42, \\
G''_X(1) &= \left.\frac{(72-60t)(36-30t-5t^2)^2 + (72t-30t^2)2(36-30t-5t^2)(30+10t)}{(36-30t-5t^2)^4}\right|_{t=1} \\
E(X^2) &= G''_X(1) + G'_X(1) = 12 + 42\cdot 81, \\
D(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 12 + 42\cdot 81 - 42^2 = 42\cdot 40 - 30 = 1650.
\end{aligned}
$$

□

Úloha 2 (0.5b). Hráč má k dispozícii n identických kociek, kde n je pevné prirodzené číslo, a hodí každou kockou práve raz. Určite pravdepodobnostnú a distribučnú funkciu náhodnej veličiny X, ktorá údava súčet hodnôt na všetkých n kockách. Aplikujte pre prípad $n = 6$ a $X = 16$. Riešte za predpokladu, že každá kocka je férová t.j. každá z hodnôt 1 až 6 môže padnúť s pravdepodobnosťou $\frac{1}{6}$.

Hint: Použite generujúcu pravdepodobnostnú funkciu náhodnej veličiny.

Riešenie. Náhodnú veličinu X je možné popísať ako $\sum_{i=1}^n X_i$, kde X_i popisuje bodovú hodnotu jednej kocky a náhodné veličiny X_i sú po dvoch nezávislé. Generujúca funkcia náhodnej veličiny X_i je zrejme $G_{X_i}(t) = \frac{1}{6}(t + t^2 + \cdots + t^6)$. Z vlastností konvolúcie náhodných veličín máme

$$
G_X(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = \frac{1}{6^n}(t + t^2 + \cdots + t^6)^n = \frac{1}{6^n} t^n (1-t^6)^n \left(\frac{1}{1-t}\right)^n.
$$

V ďalšom kroku použijeme binomickú vetu a súčet geometrickej rady, aby sme našli koeficient $\pi_X(m)$ pri t^m.

$$
\begin{aligned}
G_X(t) &= \frac{1}{6^n} t^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i\right)^n \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} t^{6l} = \frac{1}{6^n} t^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n-1} t^k \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} t^{6l} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{6^n} (-1)^l \binom{k+n-1}{n-1} \binom{n}{l} t^{n+6l+k}.
\end{aligned}
$$

Koeficient pri t^k sme našli ako počet riešení z $\mathbb{N}_0$ rovnice $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$, čo sa dá ľahko odvodiť úvahou „stars and bars". Označíme $m = n + 6l + k$ a nahradíme k písmenom m, potom nutne $m - n - 6l = k \geq 0$ t.j. $\lfloor \frac{m-n}{6} \rfloor \geq l$. Keďže má byť tiež $n \geq l$ a vieme, že $\pi_X(m) > 0$ iba pre $m \in [n, 6n]$. Potom stačí uvažovať iba podmienku $\lfloor \frac{m-n}{6} \rfloor \geq l$. Celkovo máme

$$
G_X(t) = \sum_{m=n}^{6n} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-n}{6} \rfloor} \frac{1}{6^n} (-1)^l \binom{m-6l-1}{n-1} \binom{n}{l} t^m.
$$

Takže sme ukázali, že pravdepodobostná funkcia X je

$$
\pi_X(m) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-n}{6} \rfloor} \frac{1}{6^n} (-1)^l \binom{m-6l-1}{n-1} \binom{n}{l} & m \in [n, 6n] \cap \mathbb{N}, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}
$$

Zostáva odvodiť distribučnú funkciu $F_X(x)$ náhodnej veličiny X. Keďže π_X je nenulová na $\mathbb{N}$, stačí nám určiť postupnosť čiastočných súčtov $a_p = \sum_{m=n}^{p} \pi_X(m)$. Generujúca funkcia $A(t)$

postupnosti $\{a_p\}$ bude $A(t) = G_X(t)\sum_{i=0}^{\infty} t^i = G_X(t)\frac{1}{1-t}$. Takže a_p dostaneme obdobným postupom, ako sme odvodili $\pi_X(m)$, len mocnina $\frac{1}{1-t}$ nebude n, ale $n+1$.

$$A(t) = \sum_{m=n}^{6n} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-n}{6} \rfloor} \frac{1}{6^n}(-1)^l \binom{m-6l}{n}\binom{n}{l} t^m.$$

$$a_m = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-n}{6} \rfloor} \frac{1}{6^n}(-1)^l \binom{m-6l}{n}\binom{n}{l} & m \in [n, 6n] \cap \mathbb{N}, \\ 0 & m < n, \\ 1 & m > 6n. \end{cases}$$

Preto distribučná funcia $F_X(x)$, ktorá je sprava spojitá, je

$$F_X(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor - n}{6} \rfloor} \frac{1}{6^n}(-1)^l \binom{\lfloor x \rfloor - 6l}{n}\binom{n}{l} & x \in [n, 6n], \\ 0 & x < n, \\ 1 & x > 6n. \end{cases}$$

Keď je $n = 6$, potom je

$$P(X = 16) = \frac{1}{6^6}\left(\binom{15}{5} - 6\binom{9}{5}\right).$$

Na druhú stranu distribučná funkcia v bode 16 je

$$F_X(16) = \frac{1}{6^6}\left(\binom{16}{6} - 6\binom{10}{6}\right).$$

□

Bonusová úloha pre tých, ktorým prišli úlohy jedna a dva jednoduché.

Úloha 2019. Uvažujme nekonečne veľký hrací stôl tvorený nekonečne veľa za sebou idúcimi políčkami očíslovanými vzostupne prirodzenými číslami. Postavíme figúrku na jeho počiatok (hodnota 0) a v každom ťahu hodíme kockou a posunieme figúrku o hodnotu na kocke. **Nech b_k označuje pravdepodobnosť, že sa niekedy dostaneme na políčko k. Určite b_k a** $\lim_{k\to\infty} b_k$ (nie je to $\frac{1}{6}$). Riešte pre klasickú férovú kocku.

Riešenie. Jednoduché pozorovanie je, že na ľubovolné políčko sa vieme dostať iba z predošlých šesť políčok, ak sú samozrejme k dispozícii. Takže pre pravdepodobnosti b_k bude platiť obdobný rekurentný vzťah pre $k \in \mathbb{Z}$:

$$b_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k < 0 \\ \frac{1}{6}(b_{k-1} + b_{k-2} + b_{k-3} + b_{k-4} + b_{k-5} + b_{k-6}) & k > 0. \end{cases}$$

Najskôr predpokladajme, že $\lim_{k\to\infty} b_k$ existuje a označme túto hodnotu ako $b \in [0,1]$. Pokúsime sa určiť túto hodnotu. Ak dosadíme b do predošlej rekuretnej formulky, tak dostaneme iba pravdivé tvrdenie:

$$b = \lim_{k\to\infty} b_k = \frac{1}{6}\left(\lim_{k\to\infty} b_{k-1} + \lim_{k\to\infty} b_{k-2} + \lim_{k\to\infty} b_{k-3} + \lim_{k\to\infty} b_{k-4} + \lim_{k\to\infty} b_{k-5} + \lim_{k\to\infty} b_{k-6}\right) = \frac{1}{6}(6b).$$

Preto potrebujeme nájsť vhodný trik na výpočet b. Napíšeme si pod seba $n \geq 6$ poupravených rekurentných vzťahov.

$$\begin{aligned}
6b_1 &= b_0 \\
6b_2 &= b_1 + b_0 \\
6b_3 &= b_2 + b_1 + b_0 \\
6b_4 &= b_3 + b_2 + b_1 + b_0 \\
6b_5 &= b_4 + b_3 + b_2 + b_1 + b_0 \\
6b_6 &= b_5 + b_4 + b_3 + b_2 + b_1 + b_0 \\
6b_7 &= b_6 + b_5 + b_4 + b_3 + b_2 + b_1 \\
6b_8 &= b_7 + b_6 + b_5 + b_4 + b_3 + b_2 \\
\vdots &= \quad \vdots \\
6b_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5} + b_{n-6}
\end{aligned}$$

Súčtom týchto rovníc obdržíme:

$$6b_n + 5b_{n-1} + 4b_{n-2} + 3b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5} = 6b_0 = 6.$$

Potom dostávame:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 6b_n + \lim_{n\to\infty} 5b_{n-1} + \lim_{n\to\infty} 4b_{n-2} + \lim_{n\to\infty} 3b_{n-3} + \lim_{n\to\infty} 2b_{n-4} + \lim_{n\to\infty} b_{n-5} &= 6 \\
21b &= 6.
\end{aligned}$$

Zostáva ukázať, že zmienená limita existuje. Môžeme si všimnúť, že platí (vlastnosť aritmetického priemeru)

$$\min(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, b_{n-4}, b_{n-5}, b_{n-6}) \leq b_n \leq \max(b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, b_{n-4}, b_{n-5}, b_{n-6})$$

a rovnosť nastáva iba v prípade $b_{n-1} = b_{n-2} = b_{n-3} = b_{n-4} = b_{n-5} = b_{n-6}$. Takže každé $b_n \in [a_n, d_n]$ má vlastnosť $[a_n, d_n] \supset [a_{n-1}, d_{n-1}] \supset \dots$, a teda podľa Cantorovej vety o prieniku je $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, d_n] \neq \emptyset$. Aby limita existovala, potrebujeme tento prienik jednoprvkový. To ukážeme pomocou rekurentného predpisu. Máme lineárnu diferenčnú rovnicu:

$$b_k - \frac{1}{6}(b_{k-1} + b_{k-2} + b_{k-3} + b_{k-4} + b_{k-5} + b_{k-6}) = 0.$$

Jej riešenie je tvaru $b_n = \sum_{i=1}^{6} c_i(\lambda_i)^n$, kde λ_i sú komplexné korene polynómu

$$p(x) = x^6 - \frac{1}{6}(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Polynóm $p(x)$ je charakteriským polynómom matice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí, že A^6 je tvorená kladnými prvkami[1] t. j. matica A je primitívna, a naviac je aj stochastická. Potom podľa Perronovej-Frobeniovej vety má takáto matica práve jedno vlastné číslo 1 a všetky ostatné vlastné čísla λ_i splňujú $|\lambda_i| < 1$ pre $i > 1$. Preto limita $\lim_{n\to\infty} b_n$ existuje a je rovná $\frac{2}{7}$. $\square$

[1] Prvky b_n pre $n > 6$ sú lineárnou kombináciou prvkov $b_1, b_2, \ldots, b_6$ s kladnými koeficientami, lebo vždy počítame priemer šiestich pravdepodobností.