1. zkoušková písemka – MB203 – 7. 1. 2020

SKUPINA — A

Na řešení je 120 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)
Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Najděte stacionární body a lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2).$$

Zdůvodněte, proč nalezené extrémy nejsou globálními extrémy.

2. (5 bodů) Deska má tvar rovnoramenného trojúhelníka ABC se základnou BC velikosti 4 a výškou velikosti rovněž 4. Je vyrobena z materiálu, jehož hustota je úměrná druhé mocnině vzdálenosti od bodu A. Najděte vzdálenost těžiště desky od bodu B. Pro výpočet umístěte trojúhelník ABC vhodným způsobem v rovině xy a toto umístění v řešení načrtněte.

3. (5 bodů) Kouzelník Pokuston může při svém výstupu vytáhnout z klobouku maximálně dva černé králíky, jednoho bílého a tři hnědé králíky. Aby se obecenstvo nezačalo nudit vytahuje pouze čtyři králíky (na pořadí nezáleží). Nechť X je náhodná veličina udávající počet vytažených černých králíků a Y je náhodná veličina udávající počet vytažených bílých králíků.

a) Pomocí tabulky popište pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru (X, Y).

b) Jsou veličiny X a Y stochasticky nezávislé? Svou odpověď zdůvodněte.

c) Spočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X a její rozptyl.

d) Spočtěte kovarianci náhodných veličin X a Y.

4. (5 bodů) Agentura zjišťuje voličskou podporu nové politické strany. Všeobecně se předpokládá, že její podpora bude mezi jedním a deseti procenty. Kolik respondentů musí agentura oslovit s dotazem, zda by tuto stranu volili, aby se s pravděpodobností 95% výsledek průzkumu vyjádřený v procentech nelišil od očekávané hodnoty o více než procento? Udělejte odhad prvně pomocí Čebyševovy nerovnosti a potom pomocí Moivreovy-Laplaceovy věty a tabulky, kterou jste dostali. Rozdíl ve výsledcích komentujte.

1. zkoušková písemka – MB203 – 7. 1.

SKUPINA — B

Na řešení je 120 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Najděte stacionární body a lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = y \ln(x^2 + y^2).$$

Zdůvodněte, proč nalezené extrémy nejsou globálními extrémy.

2. (5 bodů) Deska má tvar rovnoramenného trojúhelníka ABC se základnou BC velikosti 2 a výškou velikosti 3. Je vyrobena z materiálu, jehož hustota je úměrná druhé mocnině vzdálenosti od bodu A. Najděte vzdálenost těžiště desky od bodu C. Pro výpočet umístěte trojúhelník ABC vhodným způsobem v rovině xy a toto umístění v řešení načrtněte.

3. (5 bodů) Kouzelník Pokuston může při svém výstupu vytáhnout z klobouku maximálně dva černé králíky, jednoho bílého a tři strakaté králíky. Aby se obecenstvo nezačalo nudit vytahuje pouze tři králíky (na pořadí nezáleží). Nechť X je náhodná veličina udávající počet vytažených černých králíků a Y je náhodná veličina udávající počet vytažených bílých králíků.

a) Pomocí tabulky popište pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru (X, Y).

b) Jsou veličiny X a Y stochasticky nezávislé? Svou odpověď zdůvodněte.

c) Spočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X a její rozptyl.

d) Spočtěte kovarianci náhodných veličin X a Y.

4. (5 bodů) Agentura zjišťuje voličskou podporu nové politické strany. Všeobecně se předpokládá, že její podpora bude mezi dvěma a deseti procenty. Kolik respondentů musí agentura oslovit s dotazem, zda by tuto stranu volili, aby se s pravděpodobností 90% výsledek průzkumu vyjádřený v procentech nelišil od očekávané podpory o více než procento? Udělejte odhad prvně pomocí Čebyševovy nerovnosti a potom pomocí Moivreovy-Laplaceovy věty a tabulky, kterou jste dostali. Rozdíl ve výsledcích komentujte.

Řešení a bodování, skupina A

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

1. a) **[1,5b]** Parciální derivace jsou

$$f_x(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad [0,5b].$$

Stacionární body jsou $[0,\pm 1]$ a $[\pm\frac{1}{e}, 0]$, [1b].

b) **[2.5b]** Druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

[0,5b]. Matice druhých derivací ve stacionárních bodech jsou

$$d^2(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d^2(\pm\frac{1}{e}, 0) = \begin{pmatrix} \pm 2e & 0 \\ 0 & \pm 2e \end{pmatrix}$$

[0,5b]. Matice $d^2(0,\pm 1)$ jsou indefinitní, tedy v bodech $[0,\pm 1]$ lokální extrémy nejsou. [0,5b]. Matice $d^2(1/e,0)$ je pozitivně definitní, v bodě je lokální minimum, [0,5b]. Matice $d^2(-1/e,0)$ je negativně definitní, v bodě je lokální maximum, [0,5b].

c) **[1b]** Zjevně

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,0)} f(x,y) = \infty, \quad \lim_{(x,y)\to(-\infty,0)} f(x,y) = -\infty,$$

tedy funkce $f(x,y)$ globální extrémy mít nemůže.

2. **[5b]** Trojúhelník umístíme v rovině xy symetricky podle osy x tak, že $A=[0,0]$, $B=[4,-2]$ a $C=[4,2]$. [1b]

Hmotnost je dána integrálem

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Delta ABC} a(x^2+y^2)dx\,dy = a\int_0^4 \int_{-x/2}^{x/2} (x^2+y^2)dy\,dx = a\int_0^4 [x^2y + y^3/3]_{-x/2}^{x/2}\,dx \\ &= a\int_0^4 \frac{13}{12}x^3\,dx = \frac{13\cdot 16a}{3}, \end{aligned}$$

[1b].

Obdobně spočítáme x-ovou souřadnici těžiště jako

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{1}{M}\int_{\Delta ABC} ax(x^2+y^2)dx\,dy = \frac{a}{M}\int_0^4 \int_{-x/2}^{x/2} (x^3+xy^2)dy\,dx = \frac{a}{M}\int_0^4 [x^3y + xy^3/3]_{-x/2}^{x/2}\,dx \\ &= \frac{a}{M}\int_0^4 \frac{13}{12}x^4\,dx = \frac{16}{5}, \end{aligned}$$

[1b].

Protože je trojúhelník i jeho hustota symetrické podle osy x, je y-ová souřadnice těžiště rovna 0. [1b]

Vzdálenost těžiště od bodu B je

$$\sqrt{\left(\frac{16}{5}-4\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{116}}{5},$$

[1b].

3. a) **[1b]** Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X,Y) je

$$\pi(0,0)=0,\ \pi(0,1)=\frac{1}{15},\ \pi(1,0)=\frac{2}{15},\ \pi(1,1)=\frac{6}{15},\ \pi(2,0)=\frac{3}{15},\ \pi(2,1)=\frac{3}{15}.$$

b) **[1b]** Náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť

$$0=P(X\le 0\wedge Y\le 0)\neq P(X\le 0)\cdot P(Y\le 0)=\frac{1}{15}\cdot\frac{5}{15}.$$

c) **[1b]**

$$\begin{aligned}EX&=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{8}{15}+2\cdot\frac{6}{15}=\frac{4}{3},\ [0,5\text{b}],\\ DX&=E(X^2)-(EX)^2=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{8}{15}+4\cdot\frac{6}{15}-\frac{16}{9}=\frac{32}{15}-\frac{16}{9}=\frac{16}{45},\ [0,5\text{b}].\end{aligned}$$

d) **[2b]**

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=E(XY)-EX\cdot EY=0\cdot\frac{6}{15}+1\cdot\frac{6}{15}+2\cdot\frac{3}{15}-\frac{4}{3}\cdot\frac{10}{15}\\ &=\frac{12}{15}-\frac{8}{9}=-\frac{4}{45}.\end{aligned}$$

4. Voličská podpora nové strany je $p\cdot 100\,\%$. K matematickému modelu úlohy použijeme náhodnou veličinu X s binomickým rozložením $\mathrm{Bi}(p,n]$. Chceme zdola odhadnout číslo n tak, aby platilo

$$P\Big(\Big|\frac{X}{n}-p\Big|\le 0,01\Big)=0.95,\quad [\mathbf{1b}]. \tag{1}$$

Prvně použijeme Čebyševovu nerovnost **[1,5b]**

$$P(|X-EX|\le\varepsilon)\ge 1-\frac{\operatorname{var}(X)}{\varepsilon^2}. \tag{2}$$

Víme, že $EX=np$ a $\operatorname{var}(X)=np(1-p)$. Proto levou stranu (1) napíšeme ve tvaru levé strany (2).

$$P(|X-np|\le 0,01n)\ge 1-\frac{np(1-p)}{(0,01)^2n^2},$$

[0 ,5b]. Odhad pro n uděláme tak, že budeme požadovat, aby pravá strana poslední nerovnice byla rovna 0,95, tj

$$1-\frac{p(1-p)}{(0,01)^2n}=0.95.$$

Odtud

$$n\ge 20\cdot p(1-p)\cdot 100^2.$$

Použijeme skutečnost, že $p\le 0,1$ a že kvadratická funkce $f(p)=p(1-p)$ je rostoucí na intervalu $[0,\frac{1}{2}]$. Proto

$$n\ge 20\cdot p(1-p)\cdot 100^2\ge 20\cdot 100^2\cdot\frac{1}{10}\frac{9}{10}=18000,\ [1\text{b}].$$

Nyní použijeme Moivreovu-Laplaceovu větu, **[2,5b]** která říká, že pro velká n je rozložení náhodné veličiny

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

blízké standardnímu normálnímu rozdělení $N(0,1)$. Nerovnost (1) můžeme tedy psát takto:

$$P\left(\left|\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right|\le\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\ge 0.95,\ [0,5\text{b}]. \tag{3}$$

Jestliže Φ je distriibuční funkce $N(0,1)$, pak pravděpodobnost vlevo je rovna

$$\Phi\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right),$$

proto

$$\Phi\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq \frac{1+0.95}{2} = 0,975,\ \ [0,5\mathrm{b}]$$

Aplikací Φ^{-1} dostaneme

$$\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \Phi^{-1}(0,975) = 1,96, [0,5\mathrm{b}].$$

Tedy

$$n \geq 100^2\,(1,96)^2\,p(1-p).$$

Použijeme, že $p \leq 0,1$ a opět že funkce $f(p) = p(1-p)$ je rostoucí na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$. Dostaneme

$$n \geq \frac{9}{100} \cdot 100^2\,(1,96)^2 > 900 \cdot 3,84 = 3457,44.$$

Proto $n \geq 3458$, [0,5b].

Odhad pomocí normálního rozdělení je přesnější. [0,5b]

Řešení a bodování, skupina B

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

1. a) **[1,5b]** Parciální derivace jsou

$$f_x(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}, \quad [0,5b].$$

Stacionární body jsou $[\pm 1, 0]$ a $[0, \pm\frac{1}{e}]$, [1b].

b) **[2.5b]** Druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

[0,5b]. Matice druhých derivací ve stacionárních bodech jsou

$$d^2(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d^2(0, \pm\frac{1}{e}) = \begin{pmatrix} \pm 2e & 0 \\ 0 & \pm 2e \end{pmatrix}$$

[0,5b]. Matice $d^2(\pm 1, 0)$ jsou indefinitní, tedy v bodech $[\pm 1, 0]$ lokální extrémy nejsou. [0,5b]. Matice $d^2(0, 1/e)$ je pozitivně definitní, v bodě je lokální minimum, [0,5b]. Matice $d^2(0, -1/e)$ je negativně definitní, v bodě je lokální maximum, [0,5b].

c) **[1b]** Zjevně

$$\lim_{(x,y)\to(0,\infty)} f(x,y) = \infty, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,-\infty)} f(x,y) = -\infty,$$

tedy funkce $f(x,y)$ globální extrémy mít nemůže.

2. **[5b]** Trojúhelník umístíme v rovině xy symetricky podle osy x tak, že $A = [0,0]$, $B = [3, -1$ a $C = [3, 1]$. [1b]

Hmotnost je dána integrálem

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Delta ABC} a(x^2+y^2)dx\,dy = a\int_0^3 \int_{-x/3}^{x/3} (x^2+y^2)dy\,dx = a\int_0^3 [x^2y + y^3/3]_{-x/3}^{x/3}\,dx \\ &= a\int_0^3 \frac{20}{27}x^3\,dx = 15a, \end{aligned}$$

[1b].

Obdobně spočítáme x-ovou souřadnici těžiště jako

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{1}{M}\int_{\Delta ABC} ax(x^2+y^2)dx\,dy = \frac{a}{M}\int_0^3 \int_{-x/3}^{x/3} (x^3+xy^2)dy\,dx = \frac{a}{M}\int_0^3 [x^3y + xy^3/3]_{-x/3}^{x/3}\,dx \\ &= \frac{a}{M}\int_0^3 \frac{20}{27}x^4\,dx = \frac{12}{5}, \end{aligned}$$

[1b].

Protože je trojúhelník i jeho hustota symetrické podle osy x, je y-ová souřadnice těžiště rovna 0. [1b]

Vzdálenost těžiště od bodu C je

$$\sqrt{\left(\frac{12}{5} - 3\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{34}}{5},$$

[1b].

3. a) **[1b]** Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X, Y) je

$$\pi(0,0) = \frac{1}{20},\ \pi(0,1) = \frac{3}{20},\ \pi(1,0) = \frac{6}{20},\ \pi(1,1) = \frac{6}{20},\ \pi(2,0) = \frac{3}{20},\ \pi(2,1) = \frac{1}{20}.$$

b) **[1b]** Náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť

$$\frac{1}{20} = P(X \leq 0 \wedge Y \leq 0) \neq P(X \leq 0) \cdot P(Y \leq 0) = \frac{4}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{10}.$$

c) **[1b]**

$$EX = 0 \cdot \frac{4}{20} + 1 \cdot \frac{12}{20} + 2 \cdot 420 = 1,\ [0,5\text{b}],$$
$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = 0 \cdot \frac{4}{20} + 1 \cdot \frac{12}{20} + 4 \cdot \frac{4}{20} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},\ [0,5\text{b}].$$

d) **[2b]**

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY &= 0 \cdot \frac{13}{15} + 1 \cdot \frac{6}{20} + 2 \cdot \frac{1}{20} - 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{20} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

4. Voličská podpora nové strany je $p \cdot 100\,\%$. K matematickému modelu úlohy použijeme náhodnou veličinu X s binomickým rozložením $\mathrm{Bi}(p, n]$. Chceme zdola odhadnout číslo n tak, aby platilo

$$P\Big(\Big|\frac{X}{n} - p\Big| \leq 0,01\Big) = 0.9, \quad [\mathbf{1b}]. \tag{4}$$

Prvně použijeme Čebyševovu nerovnost **[1,5b]**

$$P(|X - EX| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\operatorname{var}(X)}{\varepsilon^2}. \tag{5}$$

Víme, že $EX = np$ a $\operatorname{var}(X) = np(1-p)$. Proto levou stranu (1) napíšeme ve tvaru levé strany (2).

$$P(|X - np| \leq 0,01n) \geq 1 - \frac{np(1-p)}{(0,01)^2 n^2},$$

[0 ,5b]. Odhad pro n uděláme tak, že budeme požadovat, aby pravá strana poslední nerovnice byla rovna 0,9, tj

$$1 - \frac{p(1-p)}{(0,01)^2 n} = 0.9.$$

Odtud

$$n \geq 10 \cdot p(1-p) \cdot 100^2.$$

Použijeme skutečnost, že $p \leq 0,1$ a že kvadratická funkce $f(p) = p(1-p)$ je rostoucí na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$. Proto

$$n \geq 10 \cdot p(1-p) \cdot 100^2 \geq 10 \cdot 100^2 \cdot \frac{1}{10}\frac{9}{10} = 9900,\ [1\text{b}].$$

Nyní použijeme Moivreovu-Laplaceovu větu, **[2,5b]** která říká, že pro velká n je rozložení náhodné veličiny

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

blízké standardnímu normálnímu rozdělení $N(0,1)$. Nerovnost (1) můžeme tedy psát takto:

$$P\left(\left|\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq 0.9,\ [0,5\text{b}]. \tag{6}$$

Jestliže Φ je distriibuční funkce $N(0,1)$, pak pravděpodobnost vlevo je rovna

$$\Phi\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right),$$

proto

$$\Phi\left(\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq \frac{1+0.9}{2} = 0,95,\ \ [0,5\text{b}]$$

Aplikací Φ^{-1} dostaneme

$$\frac{0,01n}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \Phi^{-1}(0,95) = 1,65, [0,5\text{b}].$$

Tedy

$$n \geq 100^2\,(1,65)^2\,p(1-p).$$

Použijeme, že $p \leq 0,1$ a opět že funkce $f(p) = p(1-p)$ je rostoucí na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$. Dostaneme

$$n \geq \frac{9}{100} \cdot 100^2\,(1,65)^2 > 900 \cdot 2,72 = 2450,25.$$

Proto $n \geq 2451$, [0,5b].

Odhad pomocí normálního rozdělení je přesnější. [0,5b]