2. zkoušková písemka – MB203 – 21. 1. 2020

SKUPINA — A

Na řešení je 120 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Najděte stacionární body a lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2-y}(5 - 2x + y).$$

Dále zjistěte, zda je tato funkce na $\mathbb{R}^2$ ohraničená zdola nebo shora.

2. (5 bodů) V $\mathbb{R}^3$ uvažujme množinu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \le z \le 4(x^2 + y^2),\ z \le 4\}.$$

a) Načrtněte průnik množiny M s rovinou xz.

b) Spočítejte objem množiny M.

3. (5 bodů) Nechť X je náhodná veličina se spojitou distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{c_1 x^2}{3} & x \in (0, 3) \\ c_2 & x \ge 3. \end{cases}$$

a) Určete hodnoty c_1 a c_2 tak, aby funkce $F(x)$ byla skutečně spojitou distribuční funkcí náhodné veličiny.

b) Určete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ náhodné veličiny X.

c) Určete medián náhodné veličiny X.

d) Určete distribuční funkci $G(y)$ náhodné veličiny $Y = e^X$. Pro $G(y)$ najděte explicitní předpis pomocí elementárních funkcí a rozdělení $\mathbb{R}$ na vhodné intervaly.

4. (5 bodů) Uvažme trojúhelníkovou oblast $A \subseteq \mathbb{R}^2$ s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 0]$ a $[0, 2]$ a dále náhodný vektor (X, Y), který popisuje souřadnice bodů a má rovnoměrné rozdělení na množině A.

a) Určete sdruženou hustotu $f(x, y)$ náhodného vektoru (X, Y).

b) Určete sdruženou distribuční funkci $F(x, y)$ náhodného vektoru (X, Y) pro $x \in [0, 2]$ a $y \in [0, 2]$.

c) Určete marginální hustotu $f_X(x)$.

d) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

e) Určete pravděpodobnosti $P(X = Y)$ a $P(X^2 + Y^2 \le 1)$.

Připomeňme, že rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na množině A má konstantní hustotu pravděpodobnosti na této množině – tuto konstantu je třeba určit.

2. zkoušková písemka – MB203 – 21. 1.

SKUPINA — B

Na řešení je 120 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Najděte stacionární body a lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}(2x+y-1).$$

Dále zjistěte, zda je tato funkce na $\mathbb{R}^2$ ohraničená zdola nebo shora.

2. (5 bodů) V $\mathbb{R}^3$ uvažujme množinu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \le z \le 9(x^2+y^2),\ z \le 9\}.$$

a) Načrtněte průnik množiny M s rovinou xz.

b) Spočítejte objem množiny M.

3. (5 bodů) Nechť X je náhodná veličina se spojitou distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{c_1 x^3}{4} & x \in (0,2) \\ c_2 & x \ge 2. \end{cases}$$

a) Určete hodnoty c_1 a c_2 tak, aby funkce $F(x)$ byla skutečně spojitou distribuční funkcí náhodné veličiny.

b) Určete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ náhodné veličiny X.

c) Určete medián náhodné veličiny X.

d) Určete distribuční funkci $G(y)$ náhodné veličiny $Y = e^X$. Pro $G(y)$ najděte explicitní předpis pomocí elementárních funkcí a rozdělení $\mathbb{R}$ na vhodné intervaly.

4. (5 bodů) Uvažme trojúhelníkovou oblast $A \subseteq \mathbb{R}^2$ s vrcholy $[0,0]$, $[4,0]$ a $[0,4]$ a dále náhodný vektor (X,Y), který popisuje souřadnice bodů a má rovnoměrné rozdělení na množině A.

a) Určete sdruženou hustotu $f(x,y)$ náhodného vektoru (X,Y).

b) Určete sdruženou distribuční funkci $F(x,y)$ náhodného vektoru (X,Y) pro $x \in [0,4]$ a $y \in [0,4]$.

c) Určete marginální hustotu $f_X(x)$.

d) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

e) Určete pravděpodobnosti $P(X = 1-Y)$ a $P(X^2+Y^2 \le 4)$.

Připomeňme, že rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na množině A má konstantní hustotu pravděpodobnosti na této množině – tuto konstantu je třeba určit.

Řešení a bodování, skupina A

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

1. – **[1,5b]** Parciální derivace jsou

$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}(10x - 4x^2 + 2xy - 2), \quad f_y(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}(2x - y - 4), \quad [0,5b].$$

Stacionární bod je $[1,-2]$, [1b].

– **[2,5b]** Druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \mathrm{e}^{x^2-y}(20x^2 - 8x^3 + 4x^2y - 12x + 2y + 10), \\ f_{xy}(x,y) &= \mathrm{e}^{x^2-y}(4x^2 - 2xy - 8x + 2), \\ f_{yy}(x,y) &= \mathrm{e}^{x^2-y}(-2x + y + 3), \end{aligned}$$

[1b]. Matice druhých derivací ve stacionárním bodu je

$$d^2(1,-2) = \mathrm{e}^3 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

[0,5b]. Matice je indefinitní, tedy v bodě $[1,-2]$ je sedlo a funkce nemá žádné lokální extrémy. [1b].

– **[1b]** Zjevně

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \infty,$$

tedy funkce $f(x,y)$ není ohraničená zdola ani shora.

2. a) **[1b]** Náčrtek s dvěma parabolami procházejícími počátkem, ze kterého je zřejmé, že v integrálu musíme zvlášť počítat pro $r \in [0,1]$ a $r \in [1,2]$.

b) **[4b]** Použijeme válcové souřadnice, přitom buď

$$0 \le r \le 1, \quad r^2 \le z \le 4r^2, \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

nebo

$$1 \le r \le 2, \quad r^2 \le z \le 4, \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

[1b]. Objem množiny M je možno spočítat třemi způsoby. jedna z možností je

$$\begin{aligned} \operatorname{vol} M &= \int_M 1\,dx\,dy\,dz = \int_M r\,dz\,dr\,d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{4r^2} r\,dz\,dr\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\int_1^4\int_{r^2}^4 r\,dz\,dr\,d\alpha \quad [1b] \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(4r^2 - r^2)\,dr\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\int_1^2 r(4 - r^2)\,dr\,d\alpha \quad [1b] \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\big[r^4\big]_0^1\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\alpha = 2\pi\frac{3}{4} + 2\pi\frac{9}{4} = 6\pi. \quad [1b] \end{aligned}$$

3. a) **[1b]** Distribuční funkce splňuje $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, tj. $c_2 = 1$, [0.5b]. Distribuční funkce je spojitá, tj. $\lim_{x\to3} \frac{c_1x^2}{3} = 1$, proto $c_1 = \frac{1}{3}$, [0.5b].

b) **[0.5b]** Derivováním dostaneme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{2x}{9} & x \in (0,3) \\ 0 & x \ge 3. \end{cases}$$

c) **[1b]** Hledáme $x \in (0,3)$ takové, že $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \frac{2t}{9}dt = \frac{1}{2}$, [0.5b]. Spočteme

$$\int_0^x \frac{2t}{9}dt = \frac{1}{9}[t^2]_0^x = \frac{x^2}{9} = \frac{1}{2},$$

tj. $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$, [0.5b].

d) **[2.5b]** Platí $G(y) = P(Y \le y) = P(e^X \le y)$, [0.5b]. Tedy $G(y) = 0$ pro $y \le 0$, [0.5b]. Dále pro $y > 0$ dostaneme $G(y) = P(X \le \ln y) = F(\ln y)$. Jelikož $\ln y < 0$ pro $y \in (0, 1]$, i na tomto intervalu bude $G(y) = 0$, [0.5b]. Dále $\ln y \in (0, 3)$ znamená $y \in (1, e^3)$, [0.5b], úplný výsledek je

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ \frac{1}{9}(\ln y)^2 & y \in (1, e^3), \\ 1 & x \ge e^3. \end{cases} \qquad [0.5\text{b}].$$

4. a) **[0.5b]** Obsah pravoúhlého trojúhelníka A je 2, tedy

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x, y) \in A \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) **[2b]** Pro $x \in [0, 2]$ a $y \in [0, 2]$ předpokládejme prvně $0 \le x+y \le 2$. Potom bod $[x, y]$ leží v trojúhelníku A a $F(x, y)$ je polovina obsahu obdélníku o stranách x a y. Tedy

$$F(x, y) = \frac{1}{2}xy \quad \text{pro } x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 2, \quad [0{,}5\text{b}].$$

Nyní předpokládejme $x + y \ge 2$. Bod $[x, y]$ leží ve čtverci $[0, 2] \times [0, 2]$ vně trojúhelníka A. Proto je distribuční funkce $F(x, y)$ rovna jedné polovině obsahu čtverce o stranách x a y bez jedné poloviny obsahu pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $x + y - 2$.

$$F(x, y) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}(x + y - 2)^2, \quad \text{pro } x \in [0, 2],\ y \in [0, 2],\ x + y \ge 2, \quad [1{,}5\text{b}].$$

c) **[1b]** Platí $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$, zjevně tedy může být $f_X(x)$ nenulové pouze pro $0 \le x \le 2$. Pro takové x dostaneme

$$f_X(x) = \int_0^{2-x} \frac{1}{2}dy = -\frac{1}{2}x + 1,$$

[0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

d) **[0,5b]** Máme $f_X(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ pro $x \in (0, 2)$ a symetricky platí $f_Y(y) = -\frac{1}{2}y + 1$ pro $y \in (0, 2)$. Zjevně tedy pro taková x a y dostaneme $f(x, y) \ne f_X(x) \cdot f_Y(y)$, tj. X a Y nejsou nezávislé.

e) **[1b]** Podmínka $X = Y$ zadává jednorozměrnou množinu, tedy $P(X = Y) = 0$, [0.5b]. Podmínka $X^2 + Y^2 \le 1$ určuje kruh o poloměru 1 se středem v počátku, jehož průnik s množinou A je čtvrtkruh o obsahu $\frac{1}{4}\pi$. Tedy $P(X^2 + Y^2 \le 1) = \frac{1}{8}\pi$, [0.5b].

Řešení a bodování, skupina B

Popsané bodování používá i půlbody. Počet bodů, který vidíte v naskenovaném opraveném řešení, je desetinásobkem počtu skutečných bodů.

1. – **[1,5b]** Parciální derivace jsou

$$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}(4x^2+2xy-2x+2), \quad f_y(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}(-2x-y+2), \quad [0,5b].$$

Stacionární bod je $[-1,4]$, [1b].

– **[2,5b]** Druhé parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \mathrm{e}^{x^2-y}(8x^3+4x^2y-4x^2+12x+2y-2),\\ f_{xy}(x,y) &= \mathrm{e}^{x^2-y}(-4x^2-2xy+4x-2),\\ f_{yy}(x,y) &= \mathrm{e}^{x^2-y}(2x+y-3), \end{aligned}$$

[1b]. Matice druhých derivací ve stacionárním bodu je

$$d^2(-1,4) = \mathrm{e}^{-3}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

[0,5b]. Matice je indefinitní, tedy v bodě $[-1,4]$ je sedlo a funkce nemá žádné lokální extrémy. [1b].

– **[1b]** Zjevně

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty,$$

tedy funkce $f(x,y)$ není ohraničená shora ani zdola.

2. a) **[1b]** Náčrtek s dvěma parabolami procházejícími počátkem, ze kterého je zřejmé, že v integrálu musíme zvlášť počítat pro $r \in [0,1]$ a $r \in [1,3]$.

b) **[4b]** Použijeme válcové souřadnice, přitom buď

$$0 \le r \le 1, \quad r^2 \le z \le 9r^2, \quad \alpha \in [0,\pi]$$

nebo

$$1 \le r \le 3, \quad r^2 \le z \le 9, \quad \alpha \in [0,\pi].$$

[1b]. Objem množiny M je možno spočítat třemi způsoby. Jedna z možností je

$$\begin{aligned} \operatorname{vol} M &= \int_M 1\,dx\,dy\,dz = \int_M r\,dz\,dr\,d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{9r^2} r\,dz\,dr\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\int_1^3\int_{r^2}^{9} r\,dz\,dr\,d\alpha \quad [1b]\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(9r^2-r^2)\,dr\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\int_1^3 r(9-r^2)\,dr\,d\alpha \quad [1b]\\ &= \int_0^{2\pi} 2\big[r^4\big]_0^1\,d\alpha + \int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_1^3 d\alpha = 4\pi + 2\pi\,16 = 36\pi. \quad [1b] \end{aligned}$$

3. a) **[1b]** Distribuční funkce splňuje $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, tj. $c_2 = 1$, [0.5b]. Distribuční funkce je spojitá, tj. $\lim_{x\to 2} \frac{c_1 x^3}{4} = 1$, proto $c_1 = \frac{1}{2}$, [0.5b].

b) **[0.5b]** Derivováním dostaneme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{3x^2}{8} & x \in (0,2) \\ 0 & x \ge 3. \end{cases}$$

c) **[1b]** Hledáme $x \in (0,2)$ takové, že $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \frac{3t^2}{8}dt = \frac{1}{2}$, [0.5b]. Spočteme

$$\int_0^x \frac{3t^2}{8}dt = \frac{1}{8}[t^3]_0^x = \frac{x^3}{8} = \frac{1}{2},$$

tj. $x = \sqrt[3]{4}$, [0.5b].

d) **[2.5b]** Platí $G(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y)$, [0.5b]. Tedy $G(y) = 0$ pro $y \leq 0$, [0.5b]. Dále pro $y > 0$ dostaneme $G(y) = P(X \leq \ln y) = F(\ln y)$. Jelikož $\ln y < 0$ pro $y \in (0,1]$, i na tomto intervalu bude $G(y) = 0$, [0.5b]. Dále $\ln y \in (0,2)$ znamená $y \in (1, e^2)$, [0.5b], úplný výsledek je

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \frac{1}{8}(\ln y)^3 & y \in (1, e^2), \\ 1 & x \geq e^2. \end{cases} \qquad [0.5b].$$

4. a) **[0,5b]** Obsah pravoúhlého trojúhelníka A je 8, tedy

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & (x,y) \in A \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

b) **[2b]** Pro $x \in [0,4]$ a $y \in [0,4]$ předpokládejme prvně $0 \leq x+y \leq 2$. Potom bod $[x,y]$ leží v trojúhelníku A a $F(x,y)$ je osminou obsahu obdélníku o stranách x a y. Tedy

$$F(x,y) = \frac{1}{8}xy \quad \text{pro } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 4, \quad [0{,}5b].$$

Nyní předpokládejme $x + y \geq 2$. Bod $[x,y]$ leží ve čtverci $[0,2] \times [0,2]$ vně trojúhelníka A. Proto je distribuční funkce $F(x,y)$ rovna jedné osmině obsahu čtverce o stranách x a y bez jedné osminy obsahu pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $x + y - 4$.

$$F(x,y) = \frac{1}{8}xy - \frac{1}{16}(x+y-4)^2, \quad \text{pro } x \in [0,4],\ y \in [0,4],\ x+y \geq 4, \quad [1{,}5b].$$

c) **[1b]** Platí $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, zjevně tedy může být $f_X(x)$ nenulové pouze pro $0 \leq x \leq 4$. Pro takové x dostaneme

$$f_X(x) = \int_0^{4-x} \frac{1}{8}dy = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2},$$

[0.5b za postup a 0.5b za správný výsledek].

d) **[0,5b]** Máme $f_X(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ pro $x \in (0,4)$ a symetricky platí $f_Y(y) = -\frac{1}{8}y + \frac{1}{2}$ pro $y \in (0,4)$. Zjevně tedy pro taková x a y dostaneme $f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, tj. X a Y nejsou nezávislé.

e) **[1b]** Podmínka $X = 1 - Y$ zadává jednorozměrnou množinu, tedy $P(X = 1 - Y) = 0$, [0.5b]. Podmínka $X^2 + Y^2 \leq 4$ určuje kruh o poloměru 2 se středem v počátku, jehož průnik s množinou A je čtvrtkruh o obsahu $\frac{1}{4} \cdot 4\pi = \pi$. Tedy $P(X^2 + Y^2 \leq 4) = \frac{1}{8} \cdot \pi = \frac{1}{8}\pi$, [0.5b].