Derivace a diferenciál

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

n-1 proměnných můžeme fixovat a jednu, např. 2. ponechat jako volnou

$$g(t) = f(x_1, t, x_3, \dots, x_n)$$

Derivaci $g'(t)\big|_{t=x_2} = \lim_{t \to x_2} \frac{g(t) - g(x_2)}{t}$ nazýváme 2. parciální derivací funkce f v bodě $(x_1, x_2 \dots x_n)$ a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = f_{x_2}(x)$.

Tyto parc. derivace jsou derivace ve směru souřadnic $x_1, x_2, \dots, x_n$

Můžeme definovat derivaci ve směru libovolného vektoru v

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

i-té místo

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d_{e_i} f(x) \quad e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$

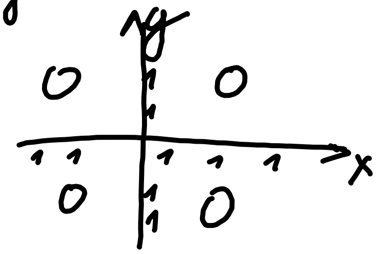
Má-li $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivaci v bodě x_0, pak se v okolí tohoto bodu chová „slušně" – např. je v tomto bodě spojitá.

Pro $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $n\geq 2$ to není obecně pravda. Existence parc. derivací ani směrové derivace nezaručuje „slušné" chování.

Příklad 1

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & xy=0 \\ 0 & xy\neq 0 \end{cases}$$



$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$

Obdobně $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

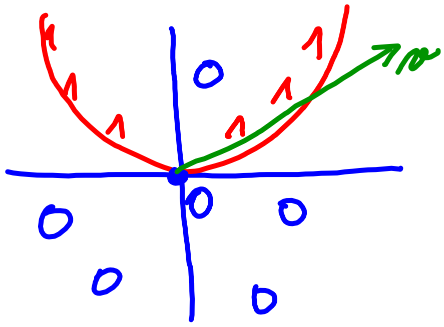
$v=(a,b)$ $a\cdot b\neq 0$

$$d_v g(0,0) = \lim_{t\to 0_+} \frac{g((0,0)+t(a,b)) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0_+} \frac{0-1}{t} = -\infty$$

Funkce g má parc. derivace v $(0,0)$, ale není spojitá.

Příklad 2 $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Všechny směrové derivace jsou nulové

$$d_v f(0,0) = 0,$$

ale f není v $(0,0)$ spojitá

DIFERENCIÁL FUNKCE

– hlavní pojem celé přednášky

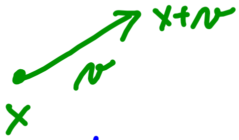
Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je DIFERENCOVATELNÁ v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, ekvivalentně říkáme, že f má DIFERENCIÁL v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, jestliže

(1) v bodě x existují derivace $d_v(x)$ ve všech směrech $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

(2) funkce $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \longmapsto d_v f(x)$ je lineární

(3) lineární funkce $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ „dobře" aproximuje funkci $f(x+v) - f(x)$ pro $\|v\|$ malé. To znamená následující:

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - d_v f(x)}{\|v\|} = 0$$



Diferenciál funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ je lin. zobrazení

$$df(x) : v \in \mathbb{R}^n \longmapsto d_v f(x) \in \mathbb{R}$$

Jak počítáme diferenciál?

1. Spočítáme parc. derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d_{e_i} f(x)$

Víme-li, že diferenciál existuje, pak

$$d_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) v_n$$

$$= d_{e_1} f(x) v_1 + d_{e_2} f(x) v_2 + \dots + d_{e_n} f(x) v_n$$

$v = (v_1, v_2, \dots v_n) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$

2. Diferenciál je lin. zobrazení $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadané předpisem

$$df(x) : v \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i$$

Poznámka: Každé lin. zobrazení $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je tvaru

$$\ell(v) = \ell(v_1, v_2, \dots v_n) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

$$= (a_1\ a_2\ a_3 \dots a_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Můžeme tedy psát

$$d_v f(x) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)}_{\text{Tato řádková matice reprezentuje diferenciál.}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Aby to skutečně byl diferenciál, museli bychom ověřit, že platí rovnost (3) z definice.

Věta Postačující podmínka pro existenci diferenciálu

Jestliže má funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v okolí bodu x spojité parciální derivace, pak má v x diferenciál, a to

$$d_v f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, v_i$$

Diferenciál zobrazení $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Zobrazení $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je k-tice funkcí $F_1, F_2, \dots, F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Diferenciál $dF(x)$ je tedy sestaven z diferenciálů $dF_i(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$dF(x) = \begin{pmatrix} dF_1(x) \\ dF_2(x) \\ \vdots \\ dF_k(x) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

je lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ reprezentované maticí

$$D_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right)_{j=1,2,\dots,n}^{i=1,2,\dots,k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Pro diferenciál $dF(x)$ platí

$$F(x+v) - F(x) \approx d_v F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \\ & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Poznámka: Obecné lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ má tvar

$$H(y) = Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Poznámka k definici diferenciálu funkce:

Z vlastností (2) a (3) plyne vlastnost (1).

Důkaz na straně 4 domácí úlohy.

Křivky a jejich tečné vektory

Křivka je zobrazení $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots c_n(t))$, diferenciál = derivace

křivky c je

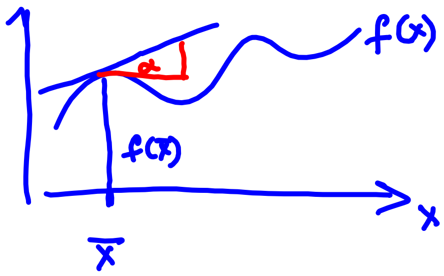
$$c'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}$$

Jeho geometrickým významem je tečný vektor ke křivce c.

Fyzikálně: rychlost bodu v $\mathbb{R}^n$, jehož dráha v závislosti na čase t je popsána zobrazením $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Geometrický význam diferenciálu funkce

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad n = 1$



$\operatorname{tg} \alpha = f'(\bar{x})$

tečna ke grafu je přímka procházející bodem $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ a má směrový vektor $(1, f'(\bar{x}))$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ graf této funkce jsou takové body
$(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3$

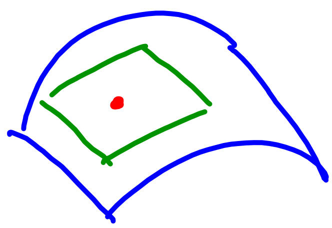
V bodě $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ uvažujme rovinu procházející tímto bodem a zadanou předpisem

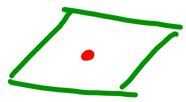
$$z(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2)}$$

Má-li f v bodě $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ diferenciál (rovná se), pak $z(x_1, x_2)$ popisuje tečnou rovinu ke grafu funkce f.

Modře je graf funkce f

• $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$





tečná rovina v •

Tečná rovina je popsána předchozí rovnicí

- v okolí • je graf f a graf tečné roviny „skoro“ neliší
- to je přesně ta vlastnost, kterou má diferenciál,
  (3) v definici

<u>Věta</u> Má-li funkce $f: R^n \to R$ v bodě x diferenciál, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz je v přípravě.

Diferenciál a lokální extrémy

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v $x \in \mathbb{R}^n$ lokální minimum, jestliže existuje okolí O bodu x takové, že

$$\forall y \in O \quad f(y) \geq f(x)$$

- ostré lok. minimum

$$\forall y \in O \setminus \{x\} \quad f(y) > f(x).$$

Nutná podmínka pro existenci lok. minima nebo maxima je pak $d_v f(x) = 0$.

Existuje-li diferenciál, tak musí být roven nulovému lin. zobrazení

$$df(x) = 0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$