1

Přednáška 01 A

Zobrazení $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

Funkce $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Křivka $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Předpis zobrazení

Definiční obor (= maximální definiční obor)

Graf funkce

Graf zobrazení

Obraz křivky

Topologie $\mathbb{R}^n$

- metrika $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$

je odvozena ze skalárního součinu

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \quad \|x-y\| = \rho(x,y)$$

- otevřené ε-okolí bodu x

$$O_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \ \rho(x,y) < \varepsilon \}$$

- okolí bodu x je jakákoliv množina $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ s vlastnostmi

1. $x \in \mathcal{O}$
2. $\exists \varepsilon > 0 \ \ O_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{O}$

- limita posloupnosti bodů $x(i) \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$ je bod $x \in \mathbb{R}^n$ s vlastností

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists i_0 \in \mathbb{N} \; \forall i \geq i_0 \quad x(i) \in O_\varepsilon(x)$

$\|x(i) - x\| < \varepsilon$

Píšeme $\lim\limits_{i \to \infty} x(i) = x$, říkáme, že body $x(i)$ konvergují k bodu x.

- vnitřní bod množiny $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je takový bod $x \in A$, že existuje $\varepsilon > 0$ a $O_\varepsilon(x) \subseteq A$.
- otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ je množina, jejíž každý bod je vnitřní
- hromadný bod množiny $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je bod $x \in \mathbb{R}^n$ takový, že existuje posloupnost $x(i) \in A$, $i \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{i \to \infty} x(i) = x$.
- uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$ je taková množina, která obsahuje všechny své hromadné body

Jednoduché cvičení $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, právě když $\mathbb{R}^n \setminus A$ je uzavřená.

$\boxed{\text{SPOJITÉ ZOBRAZENÍ:}}$ $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ je spojité v bodě $x \in A$, jestliže

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in O_\delta(x) \cap A \quad F(y) \in O_\varepsilon(x)$

Trochu jinak

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall y \in A \quad \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|F(y) - F(y)\| < \varepsilon$

Zobrazení F je spojité na A, jestliže je spojité ve všech bodech množiny A.

<u>LIMITA ZOBRAZENÍ</u> $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

v hromadném bodě x množiny A je $z \in \mathbb{R}^k$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in A \ 0 < \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|F(y) - z\| < \varepsilon$$

Píšeme $\lim_{y \to x} F(y) = z$.

<u>Cvičení</u>: Nechť $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce. Napište definici toho, že

$$\lim_{y \to x} f(y) = \infty \text{ nebo } -\infty.$$

<u>Poznámka</u>. Ve cvičení budete počítat úlohy typu $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x_1 \to 1 \\ x_2 \to \infty}} f(x_1, x_2) = L \in \mathbb{R}.$$

Význam:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists K > 0 \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$0 < |x_1 - 1| < \delta \wedge x_2 > K \Rightarrow |f(x_1, x_2) - L| < \varepsilon$$

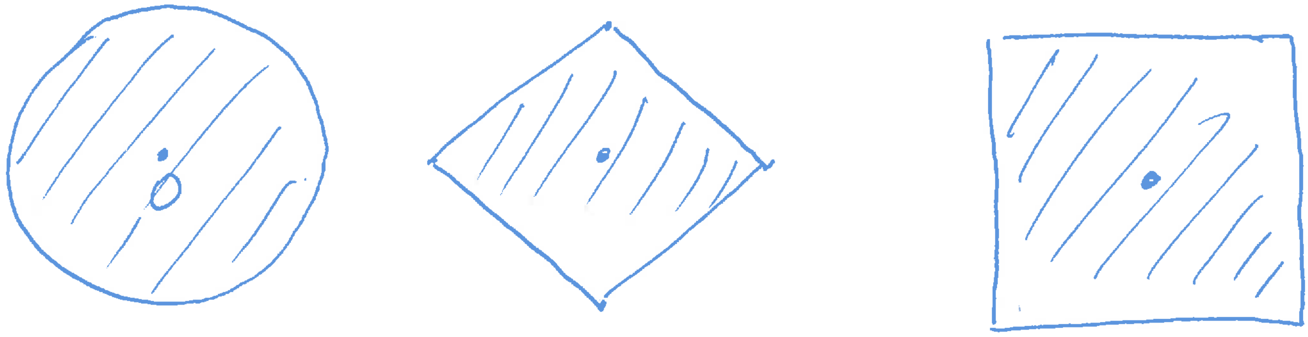
<u>Jiné metriky v $\mathbb{R}^n$</u>

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$$

$$\rho_{max}(x, y) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\}$$

určují stejnou topologii. Jednotkové koule v metrikách v $\mathbb{R}^2$ okolo středu $0 \in \mathbb{R}^n$

$\rho = \rho_2$ $\qquad$ ρ_1 $\qquad$ ρ_{max}



$$B_\rho(0) = \{ y \in \mathbb{R}^2 ;\ \rho(y,0) \le 1 \}$$

Všechny tyto metriky určují stejnou topologii, tj. stejná okolí, otevřené a uzavřené množiny.

TVRZENÍ

Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu je součet, rozdíl, součin a podíl limit, má-li tento smysl stejně jako u funkcí jedné proměnné.

Cvičení $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je spojitá v $x \in A$, právě když $\lim\limits_{y \to x} F(y) = F(x)$.

Pro spojitost součtu, rozdílu, součinu a podílu platí analogické tvrzení jako pro limity.

Varování: Pro funkce více proměnných nemáme žádné l'Hospitalova pravidla.

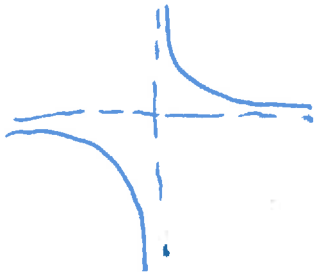
Způsob zjištění, zda limita existuje, či neexistuje, si ukážeme na příkladech.

Příklad 1 $\quad f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje

Vezmeme množinu $\mathbb{R}\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} \quad \text{neexistuje}$$



Vezmeme množina $\{(x,-x) \in \mathbb{R}^2\}$

$$\lim_{(x,-x)\to(0,0)} f(x,-x) = \lim \frac{0}{2x^2} = 0.$$

Kdyby $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existovala, musela by být stejná vzhledem ke všem podmnožinám definičního oboru. Ta zde není, tedy neexistuje.

Příklad 2

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln 2$$

Využijeme spojitosti funkcí $\ln(x+e^y)$ a $\sqrt{x^2+y^2}$ v $(1,0)$. Limita podílu je podíl limit, má-li tento smysl, a to zde má.

Příklad 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\cdot$$

$$\lim_{y\to a} y = 1\cdot a = a.$$

Příklad 4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{x^4+y^2}$$

Budeme počítat v polárních souřadnicích

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

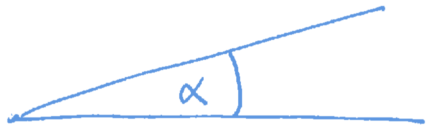
$$\lim_{r\to 0_+} \frac{r^3\cos^2\alpha|\sin\alpha|}{r^4\cos^4\alpha + r^2\sin^2\alpha} = \lim_{r\to 0_+} \frac{r\cos^2\alpha|\sin\alpha|}{r^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{0}{\sin^2\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \sin\alpha\neq 0 \\ \text{nemá smysl} & \text{pro } \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Pro $\sin\alpha = 0$ je $y = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

Limita existuje a je rovna 0 po každé přímce



Uvažujme nyní parabolu $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

KOMPAKTNÍ MNOŽINY

Množina K v metrickém prostoru se nazývá kompaktní, jestliže z každé posloupnosti bodů $x(i) \in K$, $i \in N$, lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x(i_j)\}_{j=1}^{\infty}$

$$\lim_{j\to\infty} x(i_j) \in K.$$

V každém metrickém prostoru platí

<u>TVRZENÍ:</u> je-li K kompaktní v metrickém prostoru a $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak f nabývá na K svého minima i maxima.

<u>Důkaz:</u> množina $\{f(x) \in \mathbb{R};\ x \in K\}$ je zdola omezená. Kdyby nebyla, existuje posloupnost $x(i) \in K$ $\lim\limits_{i \to \infty} f(x_i) = -\infty$.

Z $\{x(i)\}_{i=1}^{\infty}$ bychom vybrali podposloupnost $\{x(i_j)\}_{j=1}^{\infty}$ takovou, že ~~lim f(x(i_j))~~

$$\lim_{j \to \infty} x(i_j) = x \in K.$$

Pak ze spojitosti f plyne

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} f(x(i_j)) = -\infty,$$

což není možné $(f(x) \in \mathbb{R})$.

Tedy $\{f(x) \in \mathbb{R},\ x \in K\}$ je zdola omezená a existuje tedy její infimum

$$m = \inf\{f(x) \in \mathbb{R},\ x \in K\} \in \mathbb{R}.$$

Z definice infima plyne, že pro každé

$i \in \mathbb{N}$ existuje $x(i) \in K$

$$m \le f(x(i)) < m + \frac{1}{i}$$

Proto $\lim\limits_{i \to \infty} f(x(i)) = m$.

Vezmeme vybranou podposloupnost $x(i_j)$ konvergující k nějakému $x \in K$.

Pak

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} f(x(i_j)) = m.$$

Tedy f nabývá v x svého minima. $\blacksquare$

Jak vypadají kompaktní podmnožiny v $\mathbb{R}^n$?

<u>VĚTA</u>: $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je K uzavřená a omezená (tj. $\exists r > 0$ tak, že $K \subset U_r(0)$).

<u>Důkaz</u>: Implikace $\Rightarrow$ platí v každém metrickém prostoru, implikace $\Leftarrow$ je dána vlastnostmi reálných čísel.