Přednáška 01 B

Derivace a diferenciál

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$n-1$ proměnných můžeme fixovat a jednu proměnnou brát jako volnou.

$$g(t) = f(x_1, t, x_2, \dots x_n)$$

Potom parciální derivace funkce f podle 2. proměnné je

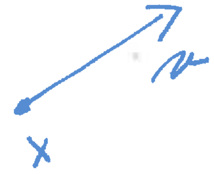
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = g'(x_2) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_2+h) - g(x_2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2+h, x_3, \dots) - f(x_1, x_2, x_3, \dots)}{h},$$

pokud tato limita existuje.

Toto je derivace funkce f ve směru souřadnic $x_1, x_2, \dots x_n$. Můžeme ale definovat derivaci funkce f ve směru jakéhokoliv nenulového vektoru $v \in \mathbb{R}^n$



$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x_1+tv_1, x_2+tv_2, \dots, x_n+tv_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t}$$

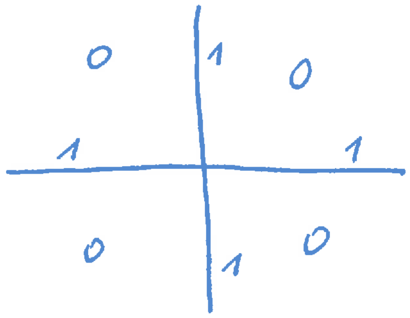
Zřejmě $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ je derivace ve směru vektoru $(0,0,\dots 0,1,0,\dots 0)$.

$\nearrow$ i-té místa

Existence směrových derivací nám nezaručuje „slušné" chování funkce, když $n \geq 2$.

<u>Příklad 1</u> $\quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(x,y) = 1 \quad xy = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \quad xy \neq 0$



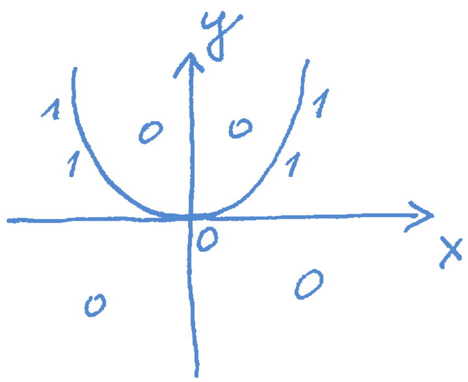
$d_v\, g(0,0) = 0$ pro $v = (v_1, v_2)$, $v_1 \cdot v_2 = 0$

$d_v\, g(0,0)$ neexistuje pro $v = (v_1, v_2)$, $v_1 \cdot v_2 \neq 0$

Nespojitá v $(0,0)$, i když má v tomto bodě parciální derivace.

<u>Příklad 2</u> $\quad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad h(x,y) = 1 \quad y = x^2 \neq 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad$ jinde



má všechny směrové derivace v bodě $(0,0)$ nulové, přesto není v $(0,0)$ spojitá.

HLAVNÍ DEFINICE této přednášky

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je DIFERENCOVATELNÁ v bodě $x \in \mathbb{R}^n$, ekvivalentně říkáme, že má v bodě x diferenciál, jestliže

(1) v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$,

(2) funkce $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto d_v f(x)$ je lineární

(3) funkce $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ „dobře" aproximuje funkci $f(x+v) - f(x)$ pro $\|v\|$ malé. Přesně to znamená tohle:

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - d_v f(x)}{\|v\|} = 0$$

Lineární funkce $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto d_v f(x)$ se nazývá diferenciál funkce f v bodě x.

Vlastnosti (2) a (3) implikují vlastnost (1). Nechť $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární a platí

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - Dv}{\|v\|} = 0.$$

Pak

$$0 = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+tv) - f(x) - D(tv)}{\|tv\|} =$$

$$= \lim_{t \to 0_+} \left(\frac{f(x+tv) - f(x)}{t\|v\|} - \frac{t\,D(v)}{t\,\|v\|} \right) =$$

$$= \frac{1}{\|v\|} \left(\lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - D(v) \right)$$

Tedy odtud plyne, že

$$D(v) = \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = d_v f(x).$$

Z linearity diferenciálu plyne, že

$$d_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, v_n$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Tedy diferenciál funkce f v bodě x je reprezentován řádkovou maticí

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

DIFERENCIÁL zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

Zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je vlastně souborem k funkcí $F_1, F_2, \dots, F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Diferenciál $dF(x)$ je tedy souborem diferenciálů $d F_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$dF(x) = \begin{pmatrix} dF_1(x) \\ dF_2(x) \\ \vdots \\ dF_k(x) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

je lineární zobrazení reprezentované maticí

$$D_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci diferenciálu)

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak má v x diferenciál $df(x)$ a platí

$$d_v f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, v_i$$

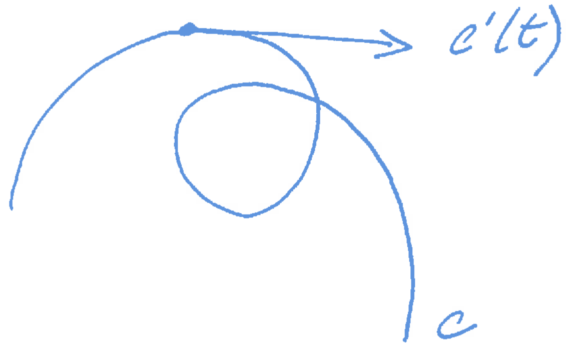
Křivky a jejich tečné vektory

Křivka $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots c_n(t))$

Derivace křivky c v bodě $t \in \mathbb{R}$ je vektor

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}$$

Geometrický význam – jde o tečný vektor ke křivce c



Geometrický význam diferenciálu

Graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vytváří plochu v $\mathbb{R}^3$. V bodě grafu $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ uvažujme rovinu, která jím prochází a je dána rovnicí

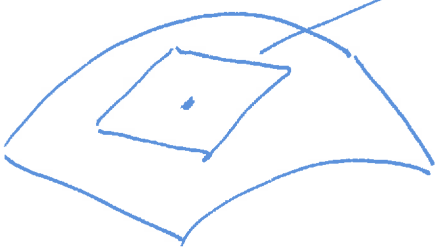
$$z = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2)}_{\text{toto je diferenciál } d_v f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$$

kde $v = (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)$

Vzhledem k vlastnosti (3) diferenciálu platí, že

$$\frac{f(x_1,x_2) - \left\{ f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1-\bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2-\bar{x}_2) \right\}}{\sqrt{(x_1-\bar{x}_1)^2 + (x_2-\bar{x}_2)^2}}$$

je malé. Tedy $z(x_1,x_2)$ určuje tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$.



<u>Věta</u> Má-li funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě x diferenciál, je v tomto bodě spojitá.

<u>Důkaz</u>:

$$\lim_{v\to 0} (f(x+v) - f(x)) = \lim_{v\to 0} \{ f(x+v) - f(x) - d_v f(x) + d_v f(x) \} = \lim_{v\to 0} \{ f(x+v) - f(x) - d_v f(x) \} + \underbrace{\lim_{v\to 0} d_v f(x)}_{0} = \lim_{v\to 0} \left\{ \|v\| \frac{f(x+v) - f(x) - d_v f(x)}{\|v\|} \right\}$$

neboť $d_v f(x)$ je lineární ve v.

$$= \lim_{v\to 0} \|v\| \cdot \lim_{v\to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - d_v f(x)}{\|v\|} = 0\cdot 0 = 0$$

Tedy $\lim_{v\to 0} f(x+v) = f(x)$.

Diferenciál funkce a lokální extrémy

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v $x \in \mathbb{R}^n$ svého lokálního minima, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}$ bodu x takové, že

$$\forall y \in \mathcal{O} : f(x) \leq f(y)$$

(ostrého lokálního minima, jestliže
$$\forall y \in \mathcal{O} \setminus \{x\} : f(x) < f(y)$$)

Obdobně definice lokálního maxima a ostrého lokálního maxima.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

– všechny parciální derivace jsou nulové.
Existuje-li diferenciál, pak je nulovým lineárním zobrazením.