Přednáška 02A

Opakování

- derivace ve směru vektoru v

  $$d_v f(x)$$

- parciální derivace

  $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

- diferenciál funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pro pevné $x \in \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení

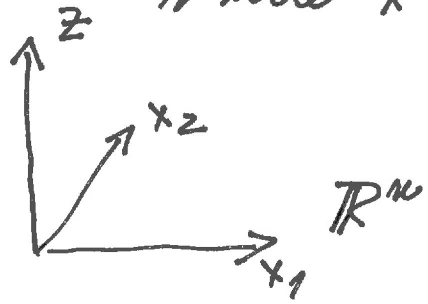
  $$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \longmapsto d_v f(x),$$

  s vlastností

  $$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{f(x+v) - f(x) - d_v f(x)}{\|v\|} = 0$$

- Tečná rovina ke grafu funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ je dána rovnicí v bodě $\bar{x}$

  $$z = f(\bar{x}) + d_{x-\bar{x}} f(\bar{x})$$



Derivace vyšších řádů

Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Vezmeme pevný vektor v a nechť derivace $d_v f(x)$ existuje pro každé x z $\mathbb{R}^n$ (nebo jen z otevřené $A \subseteq \mathbb{R}^n$). Pak

$$x \longmapsto d_v f(x) \qquad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

je opět funkce z $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a my ji můžeme derivovat. Dostáváme tak derivace vyšších řádů. Pro parciální derivaci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

dostaneme dalším derivováním funkci

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

kterou zapisujeme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j) \text{ pořadí derivování}$$

Místo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ píšeme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Tuto konstrukci můžeme iterovat, pokud příslušné limity existují, a dostáváme

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Obecně neplatí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$!

ale velmi často tomu tak je.

Věta Jestliže f má parciální derivace 2. řádu spojité, pak
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}(x).$$

Funkce třídy C^k na množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je funkce, která má na A spojité parciální derivace do řádu k včetně.

Důsledek předchozí věty Je-li f třídy C^k na $A \subseteq \mathbb{R}^n$, pak jsou všechny parciální derivace do řádu k včetně nezávislé na pořadí derivování.

Bilineární a kvadratické formy

Uvažujme vektorový prostor U nad reálnými čísly (např. $U = \mathbb{R}^n$ nebo nějaký vekt. podprostor $\mathbb{R}^n$). Funkce
$$B : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$
se nazývá bilineární forma, jestliže platí pro všechna $u, v, w \in U$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$B(au+bv, w) = aB(u,w) + bB(v,w),$$
$$B(u, av+bw) = aB(u,v) + bB(u,w).$$

B je lineární v 1. i 2. složce.

V souřadnicích nějaké báze $u_1, u_2, \dots, u_n$
$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$$
$$v = y_1u_1 + y_2u_2 + \dots + y_nu_n$$
je
$$B(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j.$$

Matice $A = (a_{ij})$ se nazývá matice bilineární formy v bázi $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Ukažme si to na příkladu $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$B(u,v) = B(x_1u_1 + x_2u_2, y_1u_1 + y_2u_2) =$$
$$= x_1B(u_1, y_1u_1 + y_2u_2) + x_2B(u_2, y_1u_1 + y_2u_2) =$$
$$= x_1y_1B(u_1,u_1) + x_1y_2B(u_1,u_2) + x_2y_1B(u_2,u_1)$$
$$+ x_2y_2B(u_2,u_2) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1$$
$$+ a_{22}x_2y_2$$

Symetrická bilineární forma je bilineární forma s vlastností
$$B(u,v) = B(v,u)$$

V souřadnicích

$$B(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j .$$

to znamená

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Kvadratická forma je funkce

$$Q : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

která vznikne ze symetrické bilineární formy $B : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ takto:

$$Q(u) = B(u,u).$$

V souřadnicích

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n .$

Kvadratická forma určuje jednoznačně svou symetrickou bilineární formu.

Příklad $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadána předpisem

$$Q(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$$

$a_{11} = 3$ $\qquad$ $a_{22} = 0$

$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}(4) = 2$ $\qquad$ $a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2}(-6) = -3$

$a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2}(8) = 4$ $\qquad$ $a_{33} = 1$

$$B(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2 + x_3y_3 .$$

Pozitivně definitní kvadratická forma Q na prostoru U je definována vlastností

$$\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\} \quad Q(u) > 0.$$

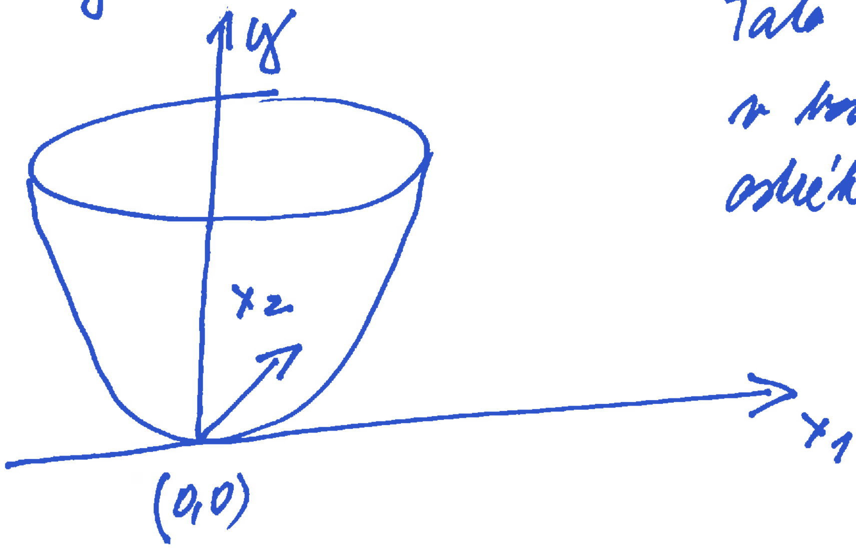
Např. standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ zadává kvadr. formu

$$Q(x) = \|x\|^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Příklad $\quad Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$y = Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

jejím grafem je eliptický paraboloid „obrácený zvonu"



Tato funkce nabývá v bodě $(0,0)$ svého ostrého minima.

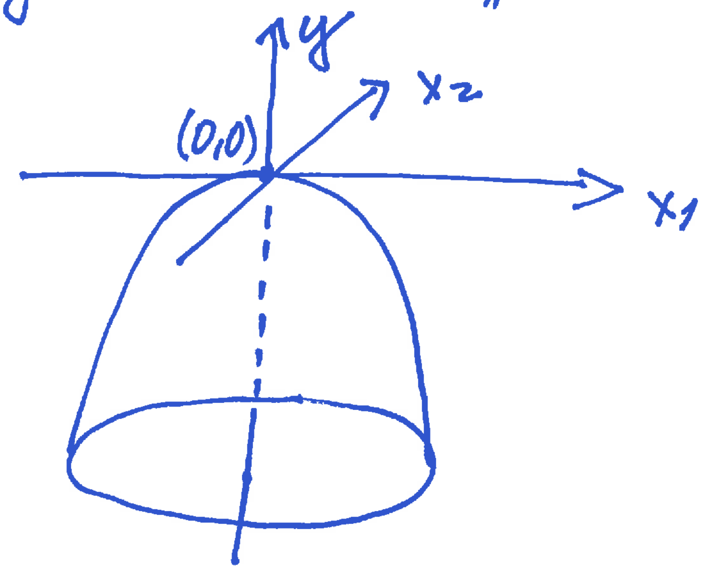
Negativně definitní kvadr. forma Q

$$\forall u \in U \setminus \{0\} \quad Q(u) < 0$$

Grafem neg. def. kvadratické formy
$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$y = Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

je eliptický paraboloid „obrácený směrem dolů"

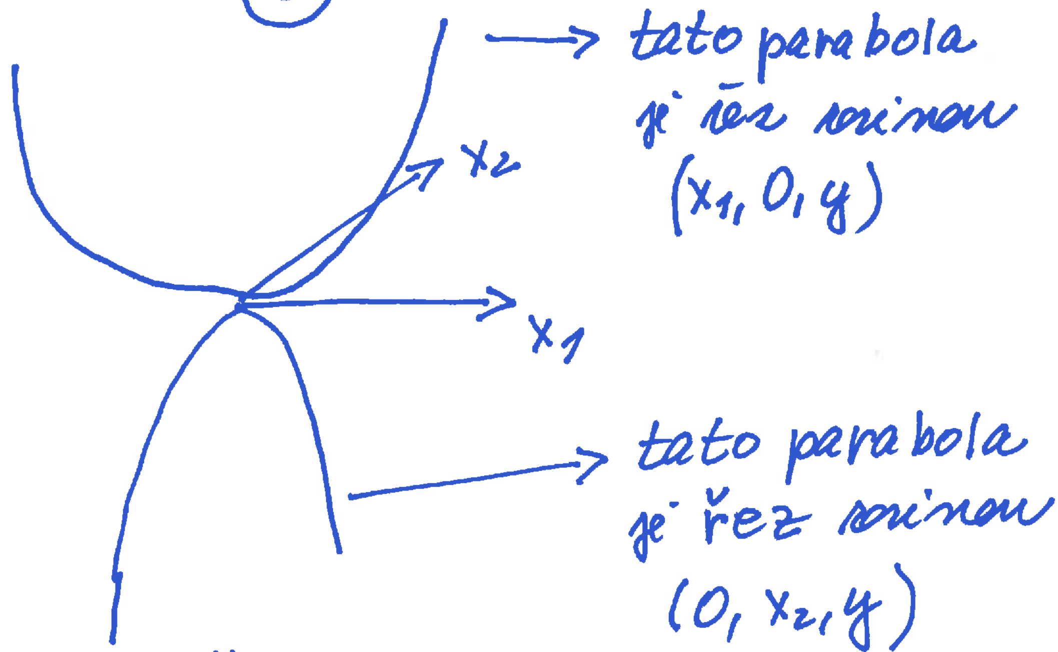


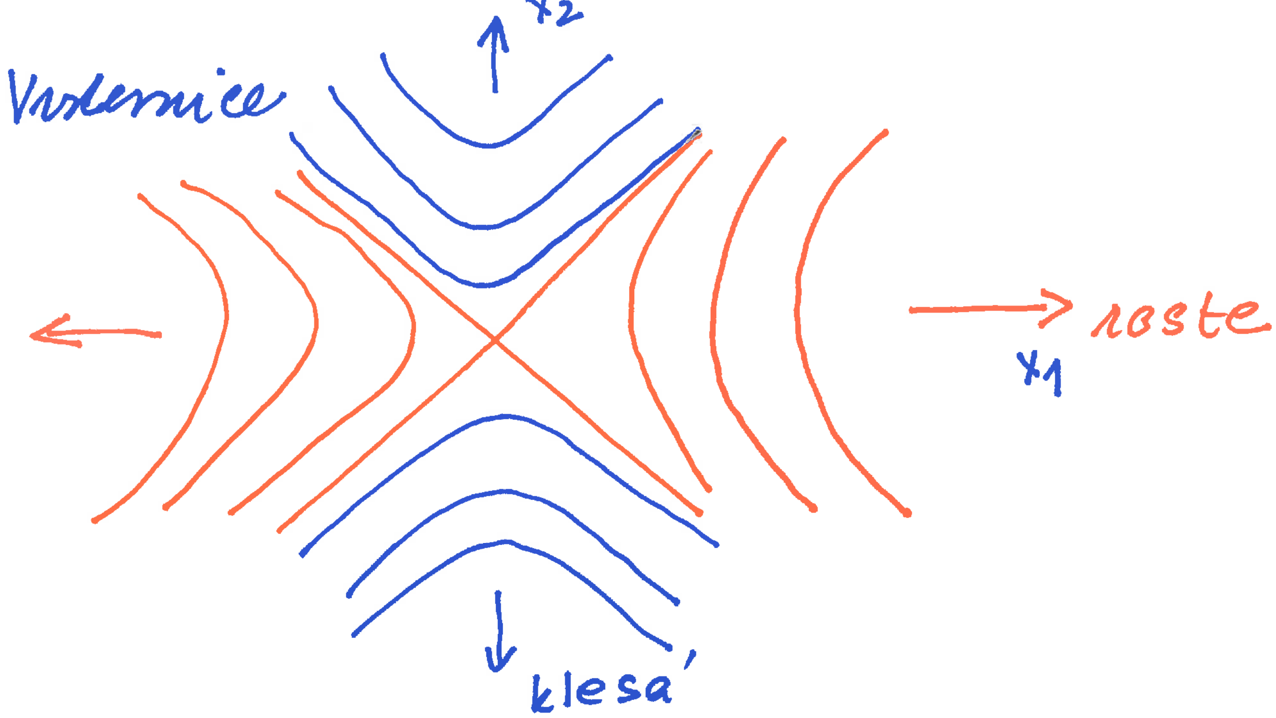
Funkce $y = -x_1^2 - x_2^2$ nabývá v bodě $(0,0)$ svého ostrého maxima.

Indefinitní kvadr. forma Q je taková,
že $\exists u \in U \quad Q(u) > 0$
a $\exists v \in U \quad Q(v) < 0$.

Příklad $\quad Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad y = Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

Grafem je tzv. hyperbolický paraboloid, který má tvar sedla.





Funkce $y = x_1^2 - x_2^2$ nenabývá svého minima ani maxima v bodě $(0,0)$, kde jsou obě parciální derivace nulové

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 - x_2^2\right)_{(0,0)} = (2x_1)_0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)_{(0,0)} = (-2x_2)_0 = 0$$

Věta Pro každou symetrickou bilin. formu B (kvadratickou formu Q) na vektorovém prostoru U nad $\mathbb{R}$ lze najít bázi $u_1, u_2, \dots, u_n$, v jejíž souřadnicích je

$$B(u,v) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_{p+q}y_{p+q}$$
$$+ 0\, x_{p+q+1}y_{p+q+1} + \dots + 0 \cdot x_ny_n$$

$$Q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 + 0 \cdot x_{p+q+1}^2$$
$$+ \dots + x_n^2$$

Počet $+1, -1$ a 0 je nezávislý na volbě báze a nazývá se signatura kvadr. formy.

Kvadr. forma na $\mathbb{R}^n$	signatura
pozitivně definitní	$(n, 0, 0)$
negativně definitní	$(0, n, 0)$
indefinitní	$(p, q, n-p-q)$ $p > 0,\ q > 0$

Příklad Najděte vyjádření kvadr. formy pomocí koeficientů $1, -1$ a 0.

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$$

Pomocí úpravy na čtverce

$$Q(x) = \left(x_3^2 + 8x_1x_3 - 6x_2x_3\right) + 4x_1x_2 + 2x_1^2$$

$$= \left(x_3 + 4x_1 - 3x_2\right)^2 - 16x_1^2 - 9x_2^2 + 24x_1x_2$$

$$+ 4x_1x_2 + 2x_1^2 =$$

$$= \left(x_3 + 4x_1 - 3x_2\right)^2 - 14x_1^2 + 28x_1x_2 - 9x_2^2$$

$$= (x_3 + 4x_1 - 3x_2)^2 - 14(x_1^2 + 2x_1x_2) - 9x_2^2$$

$$= (x_3 + 4x_1 - 3x_2)^2 - 14(x_1 + x_2)^2 - 14x_2^2 - 9x_2^2$$

$$= (x_3 + 4x_1 - 3x_2)^2 - 14(x_1 + x_2)^2 - 23x_2^2$$

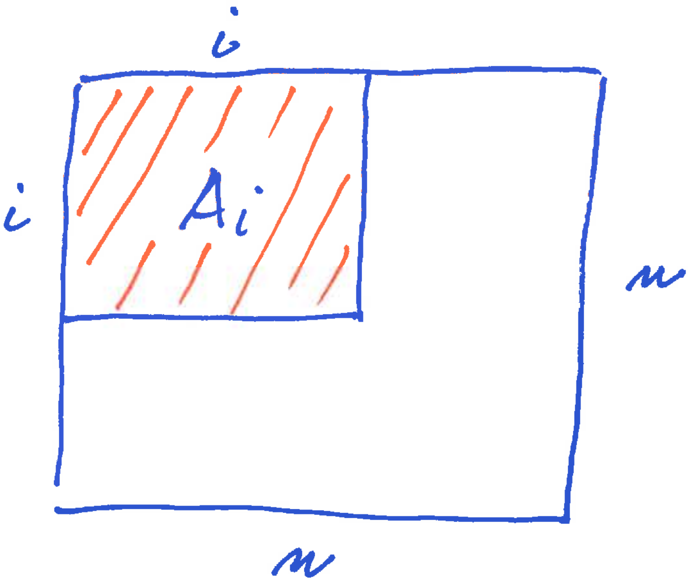
$$= -14y_1^2 - 23y_2^2 + y_3^2 =$$

$$= -\left(\sqrt{14}\,y_1\right)^2 - \left(\sqrt{23}\,y_2\right)^2 + y_3^2 = -z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

Vidíme, že Q je indefinitní kvadr. forma.

Sylvestrovo kritérium Nechť A je matice kvadr. formy Q. Pak Q je pozitivně definitní, právě když jsou všechny hlavní minory matice A kladné. Q je negativně definitní, právě když jsou všechny liché hlavní minory matice A záporné a všechny sudé hlavní minory jsou kladné.

Matice A má submatice A_i rozměru $i \times i$



i-tý hlavní minor matice A je $\det A_i$

Příklad Vezmeme kvadr. formu z předchozího příkladu a spočteme její hlavní minory.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A_1 = 2$

$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$

$\det A_3 = \det A = -24 - 24 - 4 - 18 = -70$

Souvislost s diferenciálním počtem více proměnných

Nechť $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace 2. řádu. Pak je matice tvořená 2. parciálními derivacemi symetrická. Nazýváme ji Hessián funkce f:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Tato matice určuje symetrickou bilineární formu

$$Hf(x)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} H_{ij} \cdot u_i v_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, u_i v_j$$

a kvadratickou formu

$$Hf(x)(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, v_i v_j .$$