Přednáška 02 B

Opakování $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- derivace vyšších řádů

$$\frac{\partial \left(\dfrac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j} \right)}{\partial x_k} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j \cdot \partial x_k}$$

- derivace 2. řádu - Hessián - matice $n \times n$

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$$

Derivaci 2. řádu ve směru vektorů $\underline{u}$ a $\underline{v}$ pak spočteme

$$d_v (d_u f)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x)\, u_i v_j$$

$$= Hf(x)(u,v),$$

což je bilineární symetrická forma v $\underline{u}$ a $\underline{v}$.

$$Hf(x)(v) = Hf(x)(v,v) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x)\, v_i v_j$$

je kvadratická forma.

(2)

Taylorův rozvoj

- připomeneme funkci jedné proměnné $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Její Taylorův rozvoj v 0 je

$$h(t) = h(0) + h'(0)\,t + \frac{1}{2} h''(0)\,t^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(0)\,t^{k-1} + \frac{1}{k!} h^{(k)}(\theta t)\,t^k$$

kde $\theta \in (0,1)$. Toto platí pro všechny funkce třídy C^k.

Pro funkce více proměnných zavedeme značení:

$D^1 f(x) = df(x)$ je lineární forma

$$D^1 f(x)(v) = d_v f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, v_i$$

$D^2 f(x) = Hf(x)$ je bilineární symetrická forma

$$D^2 f(x)(u,v) = Hf(x)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, u_i v_j$$

která určuje kvadratickou formu

$$D^2 f(x)(v) = D^2 f(x)(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, v_i v_j$$

$$D^3 f(x)(u,v,w) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j \cdot \partial x_k}(x)\, u_i \cdot v_j \cdot w_k$$

je 3-lineární forma

$$D^3 f(x)(v) = D^3 f(x)(v,v,v) =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j \cdot \partial x_k}(x)\, v_i \cdot v_j \cdot v_k$$

je homogenní polynom stupně 3 v proměnných $v_1, v_2, \dots, v_n$.

atd. $D^4 f(x), \dots, D^k f(x)$.

Derivování složené funkce

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))^T$ bereme jako sloupec. Chceme derivovat funkci

$$h(t) = f \circ g(t) = f(g(t)) =$$

$$= f(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)).$$

Dostáváme

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\, g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))\, g_2'(t)$$

$$+ \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))\, g_n'(t) =$$

(4)

$$h'(t) = (df)(g(t)) \cdot dg(t) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))\right) \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix}$$

jestliže jsou g_i lineární v t, pak $g_i''(t) = 0$.

Proto

$$h''(t) = \frac{d}{dt}\Big((df)(g(t)) \cdot (dg)(t)\Big) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(g(t)) \cdot g_i'(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \cdot g_i'(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))\right) \cdot g_i'(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \cdot \underbrace{g_i''(t)}_{= 0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(g(t))\, g_j'(t)\right) g_i'(t) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(g(t))\, g_i'(t)\, g_j'(t) =$$

$$= D^2 f(g(t))(g'(t))$$

a pro vyšší derivace

$$h^{(k)}(t) = D^k f(g(t))\,(g'(t)) =$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} (g(t))\, g'_{i_1}(t) \dots g'_{i_k}(t)$$

Taylorův rozvoj funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v okolí bodu x spočítáme pomocí Taylorova rozvoje funkce $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v okolí 0. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a v je vektor a

$$h(t) = f(x + tv).$$

Platí

$$h(1) = h(0) + h'(0) + \frac{1}{2} h''(0) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(0)$$

$$+ \frac{1}{k!} h^{(k)}(\theta).$$

Z předchozího dostáváme

$$f(x+v) = f(x) + D^1 f(x)(v) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(v) +$$

$$+ \dots + \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} f(x)(v) + \frac{1}{k!} D^k(x + \theta v)(v)$$

neboť $g(t) = x + tv$ má derivaci $g'(t) = v$.

$g_i(t) = x_i + t v_i$, $g_i'(t) = v_i$.

Věta o Taylorově rozvoji

Je-li $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ třídy C^k v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$, pak platí

$$f(x+v) = f(x) + D^1 f(x)(v) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(v) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} f(x)(v) + \frac{1}{k!} D^k f(x+\theta v)(v)$$

~~[illegible]~~ pro nějaké $\theta \in (0,1)$.

Uvažujme f třídy C^2 v okolí bodu x. Pak

$$f(x+v) = f(x) + D^1 f(x)(v) + \frac{1}{2} D^2 f(x+\theta v)(v)$$

Je-li x stacionární bod, tj. $D^1 f(x) = 0$, pak

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x+\theta v)(v).$$

Nechť je $D^2 f(x)$ pozitivně definitní kvadr. forma. Pak existuje $\delta > 0$, že $D^2 f(x+\theta v)$ je také pozitivně definitní pro všechna v s $\|v\| < \delta$. To plyne ze spojitosti parciálních derivací a ze Sylvestrova kritéria. (Hlavní minor matice je spojitou funkcí svých sloupců. Jestliže je kladný pro $Hf(x)$, pak musí být kladný i pro $Hf(x+\theta v)$, když $\|v\|$ je malé a $\theta \in (0,1)$.)

Tedy

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x+\theta v)(v)$$
$$> f(x) + 0 = f(x) \quad \text{pro } v \neq 0.$$

Tedy f nabývá v x svého ostrého lokálního ~~maxima~~ minima.

Analogicky, je-li $D^2f(x)$ negativně definitní, pak

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x+\theta v)(v)$$
$$< f(x) + 0 = f(x)$$

a f nabývá v x svého ostrého lokálního maxima.

Je-li $D^2f(x)$ indefinitní, je rovněž $D^2 f(x+\theta v)$ indefinitní pro $\|v\| < \delta$ a $\theta \in (0,1)$ a dostáváme, že pro nějaké libovolně malé $v_1 \neq 0$ je

$$f(x+v_1) = f(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(v_1) > f(x)$$

a pro nějaké libovolně malé v_2 je

$$f(x+v_2) = f(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(v_2) < f(x)$$

v x tedy f nenabývá svého extrému.

Věta Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce třídy C^2 v okolí bodu x. Nechť všechny 1. parciální derivace f v bodě x jsou nulové a nechť matice (Hessián) $Hf(x)$ má nenulový determinant.

(1) Je-li $Hf(x)(v) = D^2f(x)(v)$ pozitivně definitní, nabývá f v x svého ostrého lokálního minima.

(2) Je-li $Hf(x)(v) = D^2f(x)(v)$ negativně definitní, nabývá f v x svého ostrého lokálního maxima.

(3) Je-li $Hf(x)(v) = D^2f(x)(v)$ indefinitní (tj. nenastane ani (1) ani (2)) nenabývá f v x svého minima ani maxima.

Platí
$$f(x+v) \approx f(x) + D^1f(x)v + \frac{1}{2}D^2f(x)v.$$

V okolí bodu x nahradíme f jako funkci v polynomem 2. stupně v proměnných $v_1, \dots, v_n$, který má ve $v=0$ stejné derivace do řádu 2 jako $f(x)$.

<u>Příklad</u> Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (x^2-1)(1-x^4-y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6x^5+4x^3+2x-2xy^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2-1)(-2y) = 0$$

Stac. body jsou $[0,0]$, $[1,0]$, $[-1,0]$.

Druhé derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 30x^4+12x^2+2-2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2(x^2-1)$$

Hessián ve stac. bodech je

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Hf(-1,0).$$

V bodě $[0,0]$ nabývá f ostrého lokálního minima.

V bodech $[1,0]$ a $[-1,0]$ nelze použít předchozí větu, neboť

$$\det Hf = 0.$$

(10)

Zkoumejme funkční hodnoty v okolí $[1,0]$ a $[-1,0]$.

$$f(1,0) = f(-1,0) = 0$$

$f(x,0) = (x^2-1)(1-x^4) < 0$ pro $x \in (-1,1)$

Pro $x \in (-1,1)$ uvažujme $y = \sqrt{2(1-x^4)}$.

Pak

$$f(x,y) = (x^2-1)(1-x^4-2(1-x^4)) =$$
$$= (x^2-1)(x^4-1) > 0.$$

Tedy f nenabývá v $[1,0]$ ani v $[-1,0]$ svého lokálního extrému.