Přednáška 03A

Diferenciál zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ v bodě x je lineární zobrazení

$$D^1 F(x) = dF(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

$$v \longmapsto d_v F(x),$$

které „dobře" aproximuje funkci F na okolí bodu x, tj

$$\lim_{v \to 0} \frac{\| F(x+v) - F(x) - D^1 F(x)(v) \|}{\| v \|} = 0.$$

Praktický výpočet

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix} \qquad F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$D^1 F(x) = \begin{pmatrix} dF_1(x) \\ dF_2(x) \\ \vdots \\ dF_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

a platí

$$D^1(F(x))(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Matice
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$
se nazývá Jacobiho matice zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ v bodě x.

Diferenciál složeného zobrazení

Pro $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí
$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t).$$

Minule jsme měli $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt}(g \circ f)(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(f(t)) - g(f(0))}{t}$$
$$\approx \lim_{t \to 0} \frac{g(f(0) + f'(0)t) - g(f(0))}{t} =$$
$$= d_{f'(0)}\, g\,(f(0)) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_s}(f(0))\, f_s'(0)$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(0)) \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n}(f(0)) \right) \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt}(0) \\ \vdots \\ \frac{df_n}{dt}(0) \end{pmatrix}$$

$$= (D^1 g)(f(0)) \cdot D^1 f(0)$$

Tedy diferenciál složené funkce $g \circ f$ v 0 je součinem diferenciálů $D^1 g$ v $f(0)$ a $D^1 f$ v 0.

Obecně: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$

Věta: Nechť $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jsou diferencovatelné (F na U okolí x_0 a G v obraze okolí $F(U)$). Pak $G \circ F$ je diferencovatelná na okolí U bodu x_0 a její diferenciál je

$$D^1 G \circ F(x) = D^1 G(F(x)) \cdot D^1 F(x).$$

(Jacobiho matice je součinem Jacobiho matic G v $F(x)$ a F v x.)

Důkaz: Spočítáme $\frac{\partial (G_i \circ F)}{\partial x_j}(x)$:

$$\frac{\partial (G_i \circ F)}{\partial x_j}(x) =$$

$$= \frac{d}{dt} G_i(F_1(x_1, \dots, x_j + t, \dots x_n), \dots, F_k(x_1, \dots, x_j + t, \dots x_n))$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial G_i}{\partial x_s}(F(x)) \cdot \frac{\partial F_s}{\partial x_j}(x) =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \text{i-tý řádek} \\ \rule{3cm}{0.2cm} \end{pmatrix}}_{D^1G(F(x))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \text{j-tý sloupec} \\ \rule{0.2cm}{1.5cm} \end{pmatrix}}_{D^1F(x)}$$

__Příklad__ $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad G(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ (x+y)^2 \end{pmatrix}$

$F: \mathbb{R} \times (0,\infty)$ $\quad F(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$

$$(G \circ F)(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r^2(1+\sin 2\alpha) \end{pmatrix}$$

Spočítáme přímo derivaci podle α u druhé složky

$$\frac{\partial (G\circ F)_2}{\partial \alpha}(r,\alpha) = 2r^2\cos 2\alpha$$

Podle věty je

$$\frac{\partial (G\circ F)_2}{\partial \alpha}(r,\alpha) = \frac{\partial G_2(F(x,y))}{\partial x}\,\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial G_2(F(x,y))}{\partial y}\,\frac{\partial F_2}{\partial \alpha}$$

$$= (2x+2y)\,r(-\sin\alpha) + (2x+2y)\,r\cos\alpha =$$

$$= (2r\cos\alpha + 2r\sin\alpha)\,r(\cos\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= 2r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2r^2\cos 2\alpha$$

Věta o inverzním zobrazení - motivace

Nechť G je inverzní zobrazení k $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a nechť $D^1F(x_0)$ a $D^1G(F(x_0))$ existují. Potom platí

$$G \circ F = id_{\mathbb{R}^n}$$

na okolí bodu x_0 a podle věty o diferenciálu složeného zobrazení je

$$\begin{aligned} D^1G(F(x_0)) \cdot D^1F(x_0) &= D^1 id_{\mathbb{R}^n}(x_0) \\ &= E \quad (\text{jednotková matice}) \end{aligned}$$

Tedy $D^1G(F(x_0))$ a $D^1F(x_0)$ jsou navzájem inverzní matice a $\det D^1F(x_0) \neq 0$.

$$D^1G(F(x_0)) = \left(D^1F(x_0)\right)^{-1}$$

Platí více:

Věta o inverzním zobrazení

je-li $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelné zobrazení na okolí bodu x_0 a

$$\det D^1F(x_0) \neq 0,$$

pak existují okolí bodu $F(x_0)$ a na něm diferencovatelné zobrazení G, které je inverzní k F. Navíc na tomto okolí platí

$$D^1 G(y) = \left(D^1 F(x)\right)^{-1} \text{ pro } y = F(x).$$

Náznak důkazu: (1) Nejdřív musíme dokázat, že inverzní funkce existuje na okolí bodu $F(x_0)$. To obnáší i to, že F zobrazuje nějaké okolí x_0 na okolí $F(x_0)$. Používá se k tomu Banachova věta o kontrakci.
(2) Dále se dokáže, že G má diferenciál $\left(D^1 F(x)\right)^{-1}$. Používá se definice diferenciálu a předchozí výpočet.

Příklad Polární souřadnice

$$F : (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 - D \times [-\infty, 0]$$

$$F(r,\alpha) = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Inverzní funkci jsme schopni napsat přímo na $((0,\infty)\times\mathbb{R})$

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{pmatrix} \qquad G : (0,\infty)\times\mathbb{R} \to (0,\infty)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

7

$$\det D^1 F(r,\alpha) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & r(-\sin\alpha) \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r \neq 0$$

Věta o implicitní funkci – motivace

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Rovnicí $F(x,y)=0$ je určena množina bodů v $\mathbb{R}^2$. Na okolí některých bodů ji lze vyjádřit jako $y = G(x)$.

① $F(x,y) = ax + by + c = 0$ pro $b \neq 0$

pak $y = G(x) = \dfrac{-ax+c}{b}$ platí $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = b \neq 0$

② $F(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$

jde o kružnici se středem $[a,b]$ a poloměrem r.

y je funkcí x na okolí bodů $[x_0,y_0]$ kde $y_0 \neq b$ a $(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 = r^2$.

V těchto bodech je $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 2(y_0-b) \neq 0$.

Věta o implicitní funkci

Nechť $F : \mathbb{R}^{k+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1 v okolí bodu $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Nechť $\det D_y^1 F(x_0, y_0) \neq 0$. Potom existuje diferencovatelné zobrazení G definované na nějakém okolí U bodu $x_0 \in \mathbb{R}^k$,

$$G : U \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

takové, že

(1) $\quad G(x_0) = y_0$

(2) $\quad F(x, G(x)) = 0 \quad$ pro $x \in U$

(3) $\quad D^1 G(x) = -\left(D_y^1 F\right)^{-1}(x, G(x)) \cdot D_x^1 F(x, G(x))$

Značení $\quad D_y^1 F = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)$ je matice $n \times n$

$D_x^1 F = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_s}\right)$ je matice $n \times k$.

Idea důkazu Uvažujme zobrazení

$\tilde{F} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \quad \tilde{F}(x, y) = (x, F(x))$

Platí $\quad D^1 \tilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ D_x^1 F & D_y^1 F \end{pmatrix}$

V bodě (x_0, y_0) je determinant této matice

$$= \det E_k \cdot \det D^1_y F = \det D^1_y F(x_0, y_0)$$

a ten je různý od 0. Podle věty o inverzním zobrazení existuje

$$(\tilde{F})^{-1}(x, z) = (x, H(x, z))$$

Platí $\tilde{F} \circ (\tilde{F})^{-1} = id$, tedy

$$(x, z) \longmapsto (x, H(x, z)) \longmapsto (x, F(x, H(x, z))) = (x, z)$$

Speciálně pro $z = 0 \in \mathbb{R}^n$

$$(x, 0) \longmapsto (x, H(x, 0)) \longmapsto (x, F(x, H(x, 0))) = (x, 0)$$

Tedy hledaná „implicitní" funkce je $G(x) = H(x, 0)$

Derivováním v rovnosti $F(x, G(x)) = 0$ dostaneme

10

$$D_x^1 F(x, G(x)) + D_y^1 F(x, G(x)) \cdot D_x^1 G(x) = 0$$

Odtud:

$$D^1 G(x) = -\left[D_y^1 F(x, G(x))\right]^{-1} \cdot D^1 F(x, G(x))$$