Přednáška 03B

Opakování – věta o implicitní funkci

Nechť $F : \mathbb{R}^{k+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy C^1 v okolí bodu $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$. Nechť $\det D^1_y F(x_0, y_0) \neq 0$. Potom existuje diferencovatelné zobrazení G definované na nějakém okolí U bodu x_0 s hodnotami v okolí V bodu y_0 tak, že

(1) $G(x_0) = y_0$

(2) $F(x, y) = 0$ v $U \times V$ právě když $y = G(x)$

(3) $D^1 G(x) = -\left(D^1_y F\right)^{-1}(x, G(x)) \cdot D^1_x F(x, G(x))$.

Důkaz 3. vlastnost jsme odvodili derivováním rovnosti

$$F(x, G(x)) = 0$$

s použitím pravidla na derivování složené funkce.

Idea důkazu (1) a (2) Uvažujme zobrazení

$$\tilde{F} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n : \ \tilde{F}(x, y) = (x, F(x))$$

Platí

$$D^1 \tilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ D^1_x F & D^1_y F \end{pmatrix}$$

V bodě $[x_0, y_0]$ je determinant této matice

$$= \det E_k \cdot \det D^1_y F(x_0, y_0) = \det D^1_y F(x_0, y_0) \neq 0.$$

Podle věty o inverzní funkci existuje

$$(\tilde{F})^{-1}(x, z) = (x, H(x, z))$$

inverzní funkce k $\tilde{F}$ definovaná na okolí bodu $[x_0, z_0 = 0]$ s hodnotami na okolí $U \times V$ bodu $[x_0, y_0]$.

Platí $\tilde{F} \circ (\tilde{F})^{-1} = id$, tedy

$$(x, z) \longmapsto (x, H(x, z)) \longmapsto (x, F(x, H(x, z)) = (x, z)$$

Speciálně pro $z = 0 \in \mathbb{R}^n$ je

$$(x, 0) \longmapsto (x, H(x, 0)) \longmapsto (x, F(x, H(x, 0)) = (x, 0)$$

tj

$$F(x, H(x, 0)) = 0.$$

Tedy $G(x) = H(x, 0)$ je hledaná „implicitní" funkce.

Derivováním rovnosti $F(x, G(x)) = 0$ dostaneme

$$D^1_x F(x, G(x)) + D^1_y F(x, G(x)) \cdot D^1_x G(x) = 0$$

a odtud

$$D^1 G(x) = -\left[D^1_y F(x, G(x)) \right]^{-1} \cdot D^1 F(x, G(x))$$

Nadplochy v $\mathbb{R}^{k+1}$

Graf funkce $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ určuje nadplochu v $\mathbb{R}^{k+1}$

$$M = \{[x_1, \dots x_k, f(x)] \in \mathbb{R}^{k+1}\}$$

její tečná rovina je dána v bodě $[a, f(a)]$ rovnicí

$$y - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x - a_k)$$

Uvažujme funkci

$$F(x_1, \dots, x_k, y) = f(x_1, \dots x_k) - y$$

Graf funkce f je totéž, co „úrovňová" množina

$$M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad F(x, y) = 0\}$$

Proto se na nadplochy budeme dívat

obecněji: uvažujme

$$F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tak, že $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ a $F(a, b) = c$. Pak

je úrovňová množina

$$M_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1}, F(x, y) = c\}$$

na okolí bodu $(a, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$ grafem implicitní funkce

$$y = G(x)$$

a tedy k-rozměrnou nadplochu v $\mathbb{R}^{k+1}$.

její tečná rovina v bodě (a,b) je

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(a,b)\,(x_1-a_1)+\dots+\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)\,(x_k-a_k)$$

$$(*) \qquad + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\,(y-b) = 0$$

Lze ukázat pomocí implicitní funkce nebo pomocí křivky $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k+1}$ jejíž obraz leží v M_c a $\varphi(0) = (a,b)$.

Pro ni platí

$$F(\varphi(t)) = c.$$

Derivováním této rovnice dostaneme

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_i}(a,b)\,\varphi_i'(0) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\,\varphi_{k+1}'(0) = 0.$$

Vektor $(\varphi_1'(0), \dots \varphi_k'(0), \varphi_{k+1}'(0)) = \varphi'(0)$ je tečný vektor k M_c. Naopak, každý tečný vektor dostaneme tímto způsobem. To nám dává předchozí rovnici $(*)$ pro tečnou rovinu.

5

Normálový vektor k M_c je v bodě (a,b)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(a,b), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b), \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \right)$$

Ještě o trochu obecněji

$$F : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{a} \quad D^1F \neq 0.$$

Pak k-rozměrná podvarieta (nadplocha) v $\mathbb{R}^{k+1}$

$$M_c = \{ x \in \mathbb{R}^{k+1}, \; F(x) = c \}$$

má v $\bar{x} \in M_c$ tečnou nadrovinu

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) \, (x_i - \bar{x}_i) = 0.$$

Normálový vektor v bodě $\bar{x} \in M_c$ k nadploše M_c je

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots \frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}(\bar{x}) \right)$$

a nazývá se gradient funkce F.

6

Zobecnění – k-rozměrné podvariety v $\mathbb{R}^{k+n}$

$$F : \mathbb{R}^{k+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n , \quad c \in \mathbb{R}^n$$

Označme
$$M_c = \{x \in \mathbb{R}^{k+n} , \quad F(x) = 0\}$$

Nechť pro $\bar{x} \in M_c$ je

$$\text{hodnost } D^1 F(x) = n$$

$$D^1 F(\bar{x}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)$$ je matice ~~[illegible]~~ tvaru $n \times (k+n)$. Pak M_c je na okolí bodu $\bar{x}$ k-rozměrnou podvarietou v $\mathbb{R}^{k+n}$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ s tečným prostorem zadaným rovnicemi

$$\sum_{j=1}^{k+n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \, (x_j - \bar{x}_j) = 0$$

a normálovým prostorem určeným gradienty funkcí $F_1, F_2, \dots, F_n$.

$$\operatorname{grad} F_1, \operatorname{grad} F_2, \dots, \operatorname{grad} F_n$$

Vázané extrémy

Mějme funkci
$$h : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
Chceme najít její extrémy na množině
$$M_c = \{x ; F(x) = c\}$$
kde $F : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Odvodíme nutnou podmínku.

Nechť $\bar{x} \in M_c$ a $\operatorname{grad} F(\bar{x}) \neq 0$.

Předpokládejme, že h nabývá v $\bar{x}$ svého lokálního minima nebo maxima.

Pak pro každou křivku $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, jejíž obraz leží na ploše M_c a $\varphi(0) = \bar{x}$, je derivace funkce
$$h(\varphi(t))$$
rovna 0, tj.:
$$\sum \frac{\partial h}{\partial x_i}(\bar{x})\, \varphi_i'(0) = 0.$$
Tedy gradient $\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial h_{k+1}}{\partial x_{k+1}}(\bar{x})\right)$ musí být násobkem normálového vektoru,

vektor je kolmý ke všem tečným vektorům $\varphi'(0)$ plochy M_c v bodě x.

$$\operatorname{grad} h = \lambda \operatorname{grad} F \qquad (*)$$

Tedy nutná podmínka pro extrém je existence $\lambda \in \mathbb{R}$, že platí $(*)$.

Pro hledané $\bar{x} \in \mathbb{R}^{k+1}$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ dostaneme $k+2$ rovnic

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(\bar{x}) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{x})$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_{k+1}}(\bar{x}) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}(\bar{x})$$

$$F(\bar{x}) = c$$

<u>Příklad</u> na množině

$$M = \{ (x_1, \dots x_r) \in \mathbb{R}^r, \; x_1 + x_2 + \dots + x_r = c, \; x_i > 0 \}$$

najděte extrémy funkce

$$h(x_1, x_2, \dots, x_r) = x_1 x_2 \cdots x_r .$$