Přednáška 04A

Obecná věta o Lagrangeových multiplikátorech

Nechť $F = (f_1, f_2, .. f_n) : \mathbb{R}^{k+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovatelná v okolí bodu $\bar{x}$ a nechť $D^1 F$ má hodnost n. Jestliže diferencovatelná funkce

$$h : \mathbb{R}^{k+n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nabývá v bodě $\bar{x}$ svého lokálního extrému vzhledem k množině

$$M = \{x; F(x) = c\},$$

pak existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in \mathbb{R}$ (Lagrangeovy multiplikátory) tak, že

$$\operatorname{grad} h = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 + .. + \lambda_n \operatorname{grad} f_n$$

Geometricky: grad h je vektor ~~[illegible]~~ kolmý na tečnou rovinu k M v bodě $\bar{x}$.

Výpočet: Neznámé $\bar{x}$ a $\lambda_1, .., \lambda_n$: celkem $k+n+n = k+2n$ neznámých. Rovnice

$f_i(\bar{x}) = c$ $\quad n$ rovnic $\quad i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\bar{x}) = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial x_j}, \quad j = 1, .. k+n$$

$k+n$ rovnic

Integrace funkcí více proměnných

Riemannův integrál funkce jedné proměnné – opakování

Dělení D intervalu $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Body $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

Součet
$$S_{D,\xi} f = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Norma dělení D: $\|D\| = \max\limits_{i=1,\dots,n} \{x_i - x_{i-1}\}$

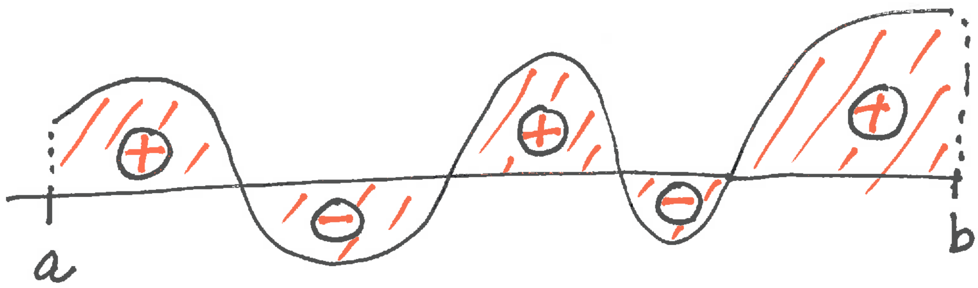
Jestliže existuje
$$\lim_{\|D\| \to 0} S_{D,\xi} f,$$
pak tuto limitu nazveme Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Věta:</u> Je-li f spojitá na $[a, b]$, pak Riem. integrál
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
existuje. Obvykle ho počítáme jako

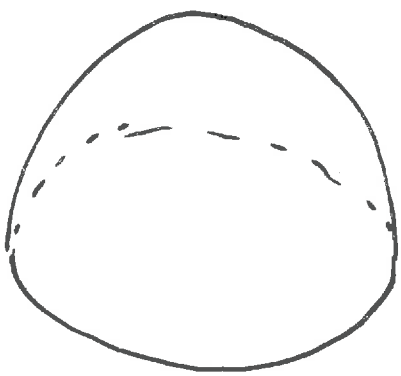
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

kde F je primitivní funkce k F.

Význam : plocha „pod" grafem funkce f



Integrál více proměnných – geometrický význam ve 2 proměnných : objem „pod" grafem funkce $f(x,y)$



$$z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\int_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,dx\,dy = \text{objem polokoule}$$

Definice

Vícerozměrný interval (vše budeme dělat v $\mathbb{R}^3$)

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

Dělení D tohoto intervalu je

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_1} = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n_2} = b_2$$
$$a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n_3} = b_3$$

Volíme $\xi_{i_1, i_2, i_3} \in [x_{i_1-1}, x_{i_1}] \times [y_{i_2-1}, y_{i_2}] \times [z_{i_3-1}, z_{i_3}]$

a uvažujeme součty na $f : I \to R$

$$S_{D,\xi} f = \sum_{i_1, i_2, i_3} f(\xi_{i_1,i_2,i_3}) (x_{i_1} - x_{i_1-1}) \cdot (y_{i_2} - y_{i_2-1}) \cdot (z_{i_3} - z_{i_3-1})$$

Norma dělení $\|D\| = \max_{i_1,i_2,i_3} \{ x_{i_1} - x_{i_1-1}, y_{i_2} - y_{i_2-1}, z_{i_3} - z_{i_3-1} \}$

jestliže existuje

$$\lim_{\|D\| \to 0} S_{D,\xi} f,$$

pak její hodnotu nazýváme Riemannovým integrálem funkce f na I a značíme

$$\int_I f(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$$

<u>Věta</u>: je-li f spojitá na I, pak

Riemannův integrál

$$\int_I f(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$$

existuje.

Poznámka: jestliže f není definována na n-rozměrném intervalu, ale pouze na množině $M \subseteq I$, pak vezmeme funkci

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z) \in M \\ 0 & (x,y,z) \notin M \end{cases}$$

a pokládáme

$$\int_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \int_I \tilde{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Základní vlastnosti:

Prostor funkcí riemannovsky integrovatelných na množině M je vektorový prostor a Riem. integrál na těchto funkcích je lineární forma

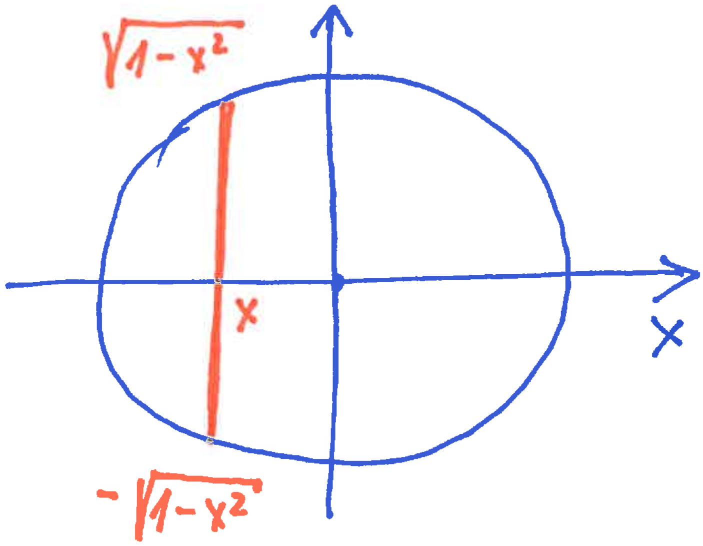
$$\int_M (af+bg) = a\int_M f + b\int_M g.$$

je-li $M = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ tak, že M_i a M_j mají pro $i \neq j$ disjunktní vnitřky, pak

$$\int_M f = \sum_{i=1}^{k} \int_{M_i} f.$$

Praktické počítání – nejdříve na příkladu

$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ na $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 1\}$



$$\int \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \right) dx$$

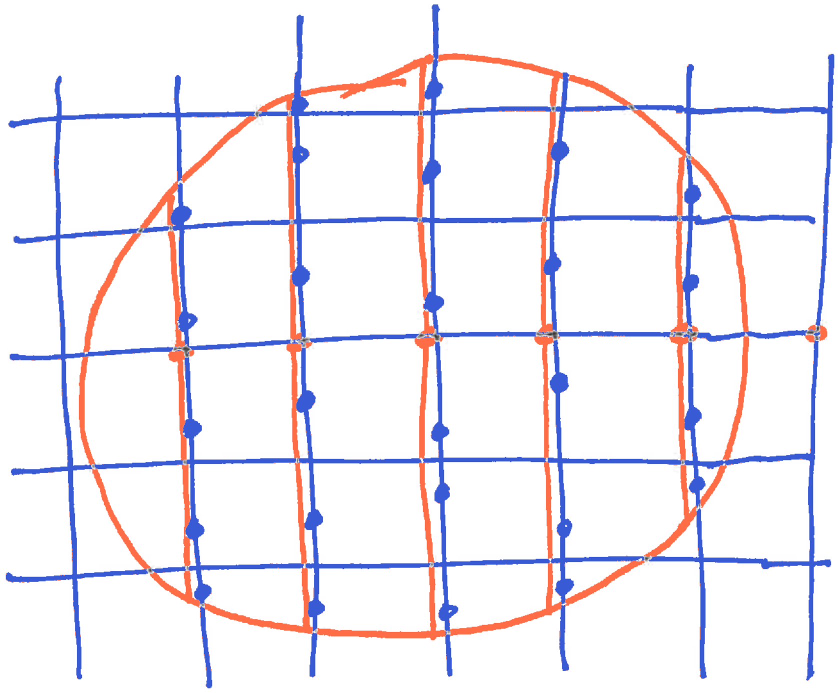
Věta Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je ohraničená množina definovaná pomocí spojitých funkcí $\psi_2, \eta_2, \psi_3, \eta_3$:

$$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\in[a,b],\ y\in[\psi_2(x),\eta_2(x)],\ z\in[\psi_3(x,y),\eta_3(x,y)]\}$$

Je-li $f: M \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, pak její Riem. integrál existuje a je roven vícenásobnému integrálu

$$\int_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\psi_2(x)}^{\eta_2(x)} \left(\int_{\psi_3(x,y)}^{\eta_3(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

Idea důkazu pro 2 proměnné



$$\sum_{i,j} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_i \left(\sum_j f(\xi_{i,j})(y_j - y_{j-1}) \right)(x_i - x_{i-1})$$

$$\approx \sum_i \left(\int_{\psi(x_i)}^{\eta(x_i)} f(x_i, y)\, dy \right)(x_i - x_{i-1})$$

$$\approx \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\eta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx .$$

Důležitou roli zde hraje skutečnost, že spojitá funkce f na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je stejnoměrně spojitá, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M\ \forall y \in M: \ \|x-y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Fubiniho věta: (Nezávislost na pořadí integrování.) Nechť

$$M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

a $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak

$$\int_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

a integrál opravdu nezávisí na pořadí integrace.

Příklad Spočítáme

$$I = \int_{x^2+y^2 \le 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Platí

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \right) dx$$

Položme $a = \sqrt{1-x^2}$ pro pevné x.

V integrálu

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

zavedeme substituci

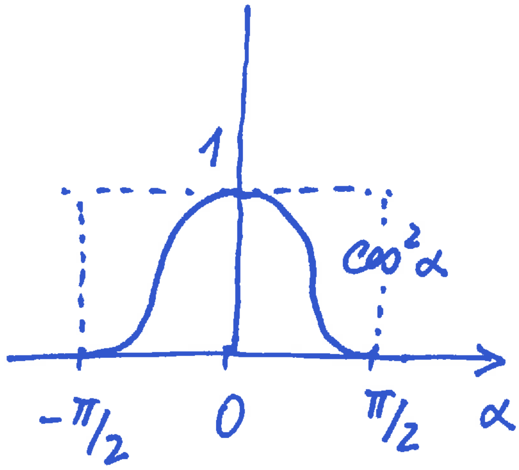
$$y = a \sin\alpha \,; \quad \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$dy = a \cos\alpha \,d\alpha$$

9

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2\alpha}\; a\cos\alpha\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\, a^2 \pi$$



Potom

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-x^2)\,\pi\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Objem jednotkové koule je tedy $\frac{4}{3}\pi$.

Ještě jedna úloha na vázané extrémy

Najděte extrémy funkce

$$h(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$$

na sféře $x^2+y^2+z^2=1$ v $\mathbb{R}^3$.

Musí platit

$$\text{grad } h = \lambda \text{ grad } (x^2+y^2+z^2),$$

což znamená

$$3x^2 = \frac{\partial h}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda 2x$$

$$3y^2 = \frac{\partial h}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda 2y$$

$$3z^2 = \frac{\partial h}{\partial z} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda 2z$$

a současně $x^2+y^2+z^2=1$. Tedy pro x,y,z různá od 0 dostaneme

$$x = \frac{2}{3}\lambda = y = z.$$

Odtud $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(x,y,z) = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

jedna proměnná rovna 0:

$$x = \frac{2}{3}\lambda = y, \quad z=0$$

Odtud $\lambda = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$, $(x,y,z) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Dvě proměnné rovny 0

$$x = \frac{2}{3}\lambda \quad , \quad y = z = 0$$

Odtud $\quad x = \pm 1 \, , \; y = z = 0$

$$(x, y, z) = (\pm 1, 0, 0) \, .$$

Stacionárních bodů je tedy osm.

Protože je sféra kompaktní, nabývá h na sféře svého maxima i minima

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 3\,\frac{3^{3/2}}{3^3} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\,3^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h(1, 0, 0) = 1$$

$$h(-1, 0, 0) = -1$$

Závěr: h nabývá svého maxima v bodech $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, které má hodnotu 1 a svého minima v bodech $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,-1)$, které má hodnotu -1. V bodě $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ nabývá svého lokálního minima a v $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ lok. maxima.