# Přednáška 04 B

## Transformace souřadnic při integraci

Opakování – transformace při integraci funkcí jedné proměnné

$f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g : J = [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ je spojitě diferencovatelná, $g$ zobrazuje $J$ na $I$. Pak

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)\,dt$$

Je-li $g$ rostoucí, je $g'(t) \geq 0$, $g(\alpha) = a < g(\beta) = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, |g'(t)|\,dt$$

Je-li $g$ klesající, je $g'(t) \leq 0$, $g(\alpha) = b > g(\alpha) = a$

a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(g(t))\, |g'(t)|\,dt$$

Tedy

$$\int_{g(J)} f(x)\,dx = \int_J f(g(t))\, |g'(t)|\,dt$$

Mějme ~~fc~~ zobrazení $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spojitě diferencovatelné a invertibilní zobrazení na $N \subseteq \mathbb{R}^n$. Jacobián zobrazení $G$ je

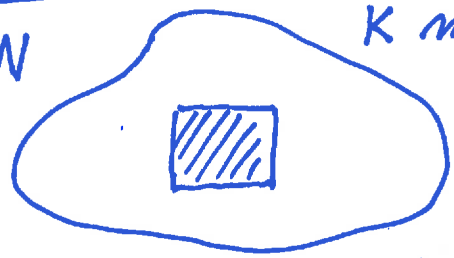
$$\det D^1 G = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial t_2}, & \dots, & \frac{\partial G_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial t_1}, & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_n}{\partial t_1}, & \frac{\partial G_n}{\partial t_2}, & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

<u>Věta</u> je-li $G(t_1, .. t_n) : N \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spojitě diferencovatelná a invertibilní funkce a $N$ je riemannovsky měřitelná, pak

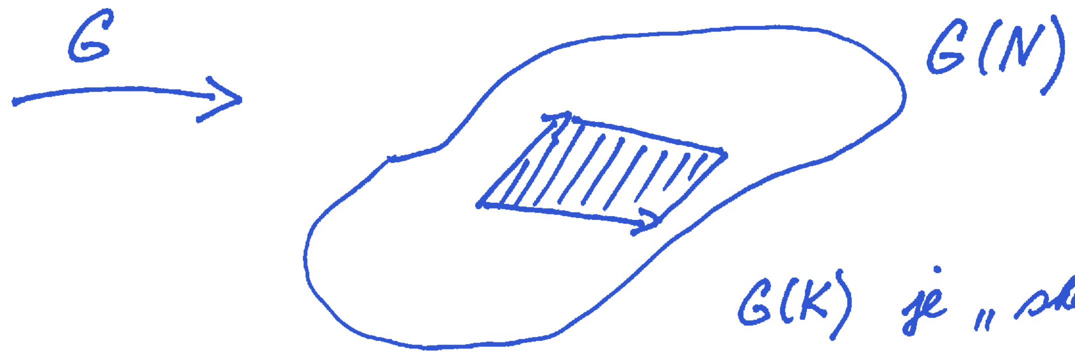
$$\int_{G(N)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 .. dx_n = \int_N f(G(t_1, .. t_n)) \, |\det D^1 G(t_1, .. t_n)| \, dt_1\, dt_2 .. dt_n$$

<u>Intuitivní zdůvodnění</u>

N



K malá krychle v $N$ o straně $a$ a obsahu $a^2$ $\Bigg\}$ Toto se zobrazí transformací $G$




G(K) je „skoro" rovnoběžník zadaný vektory

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} \\ \frac{\partial G_2}{\partial t_1} \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} \frac{\partial G_2}{\partial t_1} \\ \frac{\partial G_2}{\partial t_2} \end{pmatrix}$$

s obsahem

$$|\det D^1 G| \cdot a^2$$

## Příklady transformací

### Polární souřadnice $(r, \alpha)$

$0 \le r < \infty$

$0 \le \alpha \le 2\pi$

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

Jacobián je

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r$$

Výpočet obsahu kruhu o poloměru $R$

$$\int_{x^2+y^2 \le R^2} 1 \, dx\,dy = \int_{\substack{0 \le r \le R \\ 0 \le \alpha \le 2\pi}} r \, dr\,d\alpha = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r\,dr \right) d\alpha$$

## Objem koule výpočtem integrálu

$$\int\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq\alpha\leq 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\right)d\alpha = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^0 t^{1/2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)dt\right)d\alpha \qquad t=1-r^2$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/2}\,dt\right)d\alpha = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\,d\alpha = \frac{2}{3}\pi$$ je objem polokoule o poloměru 1.

## Válcové souřadnice v $\mathbb{R}^3$

Původní souřadnice $(x,y,z)$

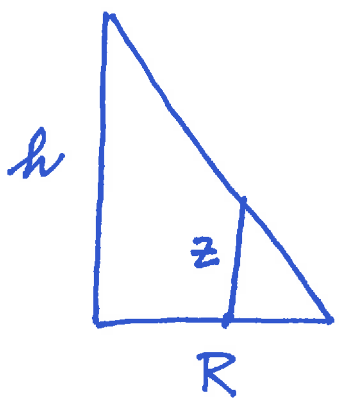
Nové souřadnice $(r,\alpha,z)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty,\infty)$

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$
$$z = z$$

Jacobián je roven $r$.

Spočítáme objem válce $V$ s kruhovou podstavou o poloměru $R$ a výškou $h$

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le z \le \frac{h}{R}\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right),\ x^2+y^2 \le R^2 \right\}$$




$$\frac{z}{R-\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{h}{R}$$

$$\int_V 1\,dx\,dy\,dz = \int_N r\,dr\,dz\,d\alpha,$$

kde
$$N = \left\{ (r,\alpha,z);\ 0 \le r \le R,\ 0 \le z \le \frac{h}{R}(R-r) \right\}$$

$$\int_N r\,dr\,dz\,d\alpha = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(r\int_0^{\frac{h}{R}(R-r)} 1\,dz\right)dr\right)d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,\frac{h}{R}(R-r)\,dr\right)d\alpha = \int_0^{2\pi}\frac{h}{R}\left[\frac{r^2R}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^R d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{h}{R}\,\frac{R^3}{6}\,d\alpha = 2\pi\,\frac{h}{R}\,\frac{R^3}{6} = \frac{\pi h R^2}{3}$$

# Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$

Původní souřadnice $x, y, z$

Nové souřadnice $r, \varphi, \psi$

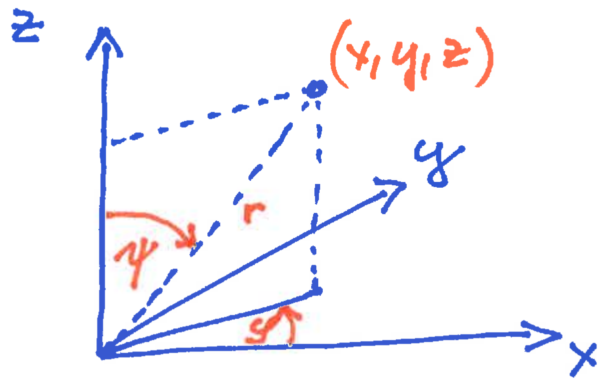
$r$ ... vzdálenost bodu od počátku

$\varphi$ ... úhel v rovině $x, y$ měřený od osy $x$ proti směru hodinových ručiček

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$\psi$ ... úhel mezi osou $z$ a rovinou $xy$ měřený od osy $z$ směrem dolů

$\psi \in [0, \pi]$




Jacobián transformace

$$G(r, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \sin\psi \\ r \sin\varphi \sin\psi \\ r \cos\psi \end{pmatrix}$$

je

$$\det \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\psi & -r \sin\varphi \sin\psi & r \cos\varphi \cos\psi \\ \sin\varphi \sin\psi & r \cos\varphi \sin\psi & r \sin\varphi \cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r \sin\psi \end{pmatrix} =$$

$$= r^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\psi & -\sin\varphi \sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$= r^2 \big( -\cos^2\varphi \sin^2\psi \sin\psi - \sin^2\varphi \cos^2\psi \sin\psi$$
$$- \cos^2\varphi \cos^2\psi \sin\psi - \sin^2\varphi \sin^2\psi \sin\psi \big)$$

$$= r^2 \left( -\cos^2\varphi \cdot 1 \sin\psi - \sin^2\varphi \cdot 1 \sin\psi \right) =$$

$$= r^2 (-\sin\psi)$$

Absolutní hodnota jacobiánu potřebná pro integrování je

$$\boxed{r^2 \sin\psi}$$

Výpočet objemu koule o poloměru $R$ pomocí sférických souřadnic

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} 1 \, dx\,dy\,dz = \int\limits_{\substack{0 \le r \le R \\ 0 \le \psi \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi}} r^2 \sin\psi \, d\psi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \left( r^2 \int_0^{\pi} \sin\psi \, d\psi \right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \left[ -\cos\psi \right]_0^{\pi} dr\, d\varphi$$

⑧

$$= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R 2r^2 \, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} R^3 \, d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

---

Dokončení úlohy o vázaných extrémech z konce minulé přednášky. Najděte extrémy

$$h(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$$

na sféře $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Dokážeme, že $h$ nabývá v $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ svého lokálního minima. Tento bod splňuje

$$\operatorname{grad} h = \lambda \operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)$$

s $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Postačující podmínka pro minimum je, že Hessián funkce

$$h(x,y,z) - \frac{\sqrt{3}}{2} f(x,y,z)$$

je pozitivně definitní. Tento Hessián je

$$\begin{pmatrix} 3x & 0 & 0 \\ 0 & 3y & 0 \\ 0 & 0 & 3z \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

a ~~[illegible]~~ je to tedy evidentně matice pozitivně definitní kvadratické formy.

<u>Zdůvodnění</u> Hledáme extrém funkce $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na nadploše $f(\bar{x}) = c$.
Máme $\bar{x}$ tak, že $f(\bar{x}) = c$,

$$\operatorname{grad} h(\bar{x}) = \lambda \operatorname{grad} f(\bar{x}).$$

Nechť $v$ je vektor takový, že

$$f(\bar{x}+v) = c.$$

Potom podle Taylorova rozvoje dostaneme

$$h(\bar{x}+v) - h(\bar{x}) = \{h(\bar{x}+v) - \lambda f(\bar{x}+v)\} - \{h(\bar{x}) - \lambda f(\bar{x})\} = (D^1 h(\bar{x}) - \lambda D^1 f(\bar{x}))v$$
$$+ \{D^2 h(\bar{x}+tv) - \lambda D^2 f(\bar{x}+tv)\}(v)$$
$$= \{D^2 h(\bar{x}+tv) - \lambda D^2 f(\bar{x}+tv)\}(v)$$

Jestliže je kvadr. forma

$$D^2 h(\bar{x}) - \lambda D^2 f(\bar{x})$$

pozitivně definitní, je pozitivně definitní i v blízkém okolí bodu $\bar{x}$, proto

$$h(\bar{x}+v) - h(\bar{x}) = \{D^2 h(\bar{x}+tv) - \lambda D^2 f(\bar{x}+tv)\}(v) > 0$$

pro $v \neq 0$. Tedy $h$ nabývá v $\bar{x}$ svého lokálního minima vzhledem k množině $M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = c\}$.